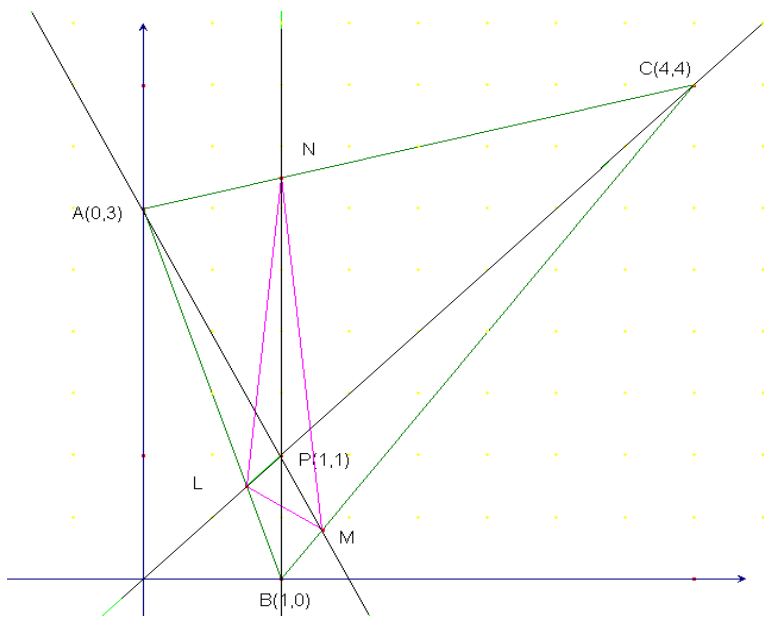
Geometría Analítica I

Una respuesta al Examen 3

Profesor: Pablo Barrera   Día 18 de noviembre, 2004

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Considere el triángulo formado por los vértices $A(0,3)$, $B(1,0)$ y $C(4,4)$, como en la figura



donde el punto $P(1,1)$ se encuentra en el interior. Considere las cevianas que pasan por P, es decir, las rectas que unen a P con los vértices; sean L, M y N las intersecciones con los lados.

a) Calcule las coordenadas Baricéntricas de P.

El punto P debe poderse representar en términos de A B y C

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

y, con la condición de que

$$\alpha+\beta+\gamma=1$$

tendremos que (α,β,γ) son las coordenadas Baricéntricas de P.
Con esto, tenemos que

$$(1,1)=\alpha(0,3)+\beta(1,0)+\gamma(4,4)$$

y con la condición de normalización, se logra el sistema

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \beta+4\gamma \\ 1 & = & 3\alpha+4\gamma \\ 1 & = & \alpha+\beta+\gamma \end{array}$$

resolviendo, tenemos

$$\alpha=\frac{3}{13},\quad \beta=\frac{9}{13},\quad \gamma=\frac{1}{13},$$

esto es, que

$$P=\frac{3}{13}A+\frac{9}{13}B+\frac{1}{13}C$$

así las coordenadas Baricéntricas de P son $(3/13,9/13,1/13)$

b) Calcule las coordenadas Baricéntricas de L, M y N.

Con las masas $m_1=3$, $m_2=9$ y $m_3=1$ asociadas a A, B y C respectivamente obtuvimos la representación de P

$$P=\frac{3}{13}A+\frac{9}{13}B+\frac{1}{13}C$$

Ahora bien, L, M, N son los pies de las cevianas que pasan por P, por lo que L debe ser el centro de masa entre A y B; es decir C no influeye, con esto

$$L=\frac{3\cdot A+9\cdot B+0\cdot C}{12}=\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}B+0\cdot C$$

por lo que indentificamos fácilmente las coordenadas Baricéntricas de L y que son $(1/4, 3/4, 0)$.

De manera análoga tenemos que

$$M = \frac{0 \cdot A + 9 \cdot B + 1 \cdot C}{10} = 0 \cdot A + \frac{9}{10}B + \frac{1}{10}C$$

obteniendo que las coordenadas Baricéntricas de M son $(0, 9/10, 1/10)$.

Ahora para N

$$N = \frac{3 \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C}{4} = \frac{3}{4}A + 0 \cdot B + \frac{1}{4}C$$

por lo que las coordenadas Baricéntricas de N son $(3/4, 0, 1/4)$

c) Muestre que el triángulo $\triangle MNL$ está en perspectiva con $\triangle ABC$.

El punto P es el centro de perspectiva. Observamos que $NL \cap BC = P_1$, $ML \cap CA = P_2$ y $MN \cap AB = P_3$

d) Calcule analíticamente el eje de perspectiva P_1, P_2 y P_3.

e) Calcule las coordenadas Baricéntricas de P_1, P_2 y P_3.

P_1 está en la línea que pasa por N y L, y aquella que pasa por B y C, por lo que escribimos

$$P_1 = (1-t)N + tL = (1-s)C + sB$$

para algun valor t y alguno s.

Ahora bien, tenemos las coordenadas de N de L en término de A, B y C, y con esto

$$P_1 = (1-t)\left(\frac{3A+C}{4}\right) + t\left(\frac{A+3B}{4}\right)$$

escribiendo en términos de A, B y C, obtenemos

$$P_1 = \left[\frac{3(1-t)}{4} + \frac{t}{4}\right]A + \frac{3t}{4}B + \frac{1-t}{4}C.$$

Pero P_1 está alineado a B y C, por lo que el coeficiente en A debe ser cero

$$\frac{3(1-t)}{4} + \frac{t}{4} = 0; \quad \text{resolviendo, obtenemos} \quad t = 3/2$$

Ahora bien, como $P_1 = (1-s)C + sB$, se sigue que

$$\frac{3}{4}t = s = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

con lo cual escribimos

$$P_1 = (1-s)C + sB = (1 - \frac{9}{8})C + \frac{9}{8}B = \frac{-1 \cdot C + 9 \cdot B}{8}$$

Obteniendo las coordenas del punto y la representación Baricéntrica dada por $(0, 9, -1)$.

Ahora, P_2 es la intersección del la línea que pasa por M y L y aquella que pasa por C y A, por lo que

$$P_2 = (1-t)C + tA = (1-s)M + sL$$

y dado que contamos con M y L en términos de A, B y C

$$\begin{aligned} P_2 &= (1-s)\left(\frac{9B+C}{10}\right) + s\left(\frac{A+3B}{4}\right) \\ &= \frac{s}{4}A + \left(\frac{9(1-s)}{10} + \frac{3s}{4}\right)B + \frac{1-s}{10}C. \end{aligned}$$

Como P_2 está en la línea que pasa por A y C, el coeficiente de B debe ser cero

$$\frac{9(1-s)}{10} + \frac{3s}{4} = 0; \quad \text{resolviendo, tenemos que} \quad s = 6$$

así

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{6}{4}A + \frac{-5}{10}C \\ &= \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}C \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos el punto P_2, y sus coordenadas Baricéntricas $(3/2, 0, -1/2)$
Ahora, P_3 es la intersección del la línea que pasa por M y N y aquella que pasa por A y B, por lo que

$$P_2 = (1-t)N + tM = (1-s)A + sB$$

pero contamos con M y N en términos de A B y C

$$\begin{aligned} P_3 &= (1-t)\left(\frac{3A+C}{4}\right) + t\left(\frac{9B+C}{10}\right) \\ &= \frac{3(1-t)}{4}A + \frac{9}{10}tB + \left(\frac{t}{10} + \frac{1-t}{4}\right)C \end{aligned}$$

Como P_2 estén la línea que une A con B, el término en C se anula

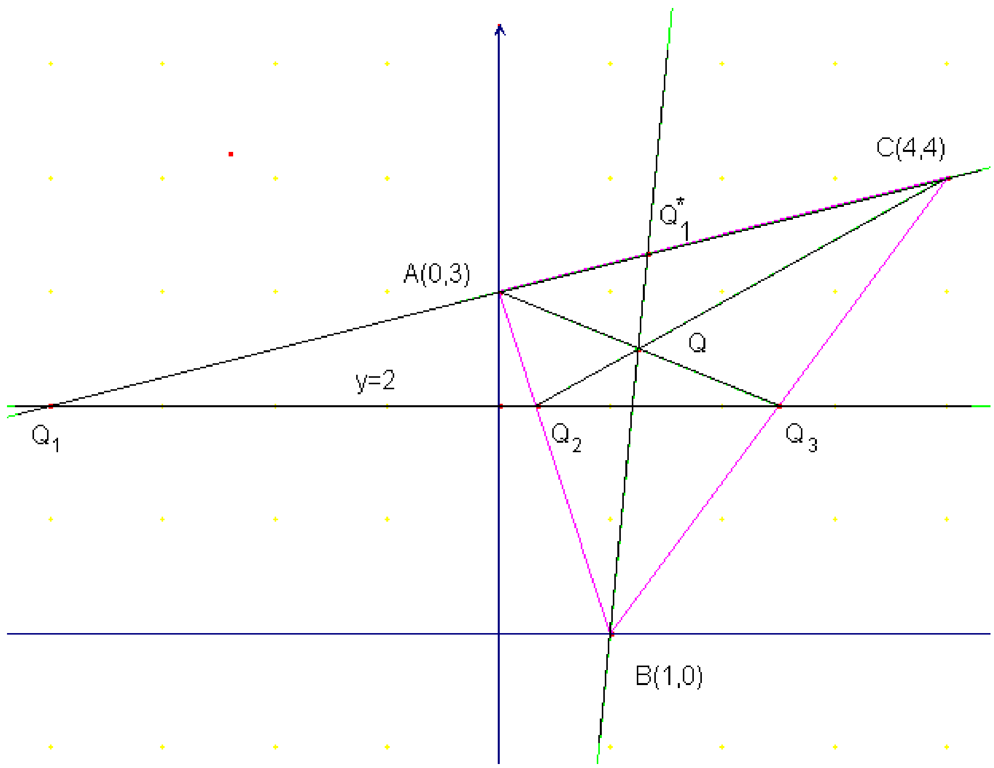
$$4t + 10 - 10t = 0; \quad t = 5/3;$$

y con ello

$$P_3 = \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$$

con lo cual obtenemos el punto P_3, y sus coordenadas Baricéntricas $(1/2, 3/2, 0)$

2. Considere el triángulo formado por los vértices $A(0,3)$, $B(1,0)$ y $C(4,4)$, y la recta $y=2$



a) Determine los puntos Q_1, Q_2 y Q_3.

b) Calcule las coordenadas Baricéntricas de Q_1, Q_2 y Q_3.

$Q_1 = (x_1, 2)$ es colineal a A y B, por consiguiente se puede expresar en estos términos a través de las "masas"

$$Q_1 = \alpha A + \beta C$$

donde $\alpha + \beta = 1$, con esto obtenemos

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha(0,3) + \beta(4,4) \\ &= (4\beta, 3\alpha + 4\beta) = (x_1, 2) \end{aligned}$$

lo que nos conduce a resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3\alpha + 4\beta &= 2 \\ \alpha + \beta &= 1 \end{aligned}$$

resolviendo, obtenemos que $\beta = -1$, $\alpha = 2$, por consiguiente $Q_1 = (-4, 2)$ y sus coordenadas Baricéntricas son $(2, -1, 0)$

Observamos que $Q_2 = (x_2, 2)$ es colineal a A y B, por consiguiente podemos escribir Q_2 como

$$Q_2 = \alpha A + \beta B$$

con $\alpha + \beta = 1$; con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} Q_2 &= \alpha(0, 3) + \beta(1, 0) \\ &= (x_2, 2) \end{aligned}$$

lo que nos conduce a que $\alpha = 2/3$ y $\beta = 1/3$. Con esto, para el punto $Q_(1/3, 2)$ sus coordenadas Baricéntricas son $(2/3, 1/3, 0)$.

Ahora bien, $Q_3(x_3, 2)$ está alineado a los puntos B y C, con lo que podemos escribir

$$Q_3 = \alpha B + \beta C$$

con $\alpha + \beta = 1$, con esto tenemos que

$$\begin{aligned} Q_3 &= \alpha(1, 0) + \beta(4, 4) \\ &= (x_3, 2) \end{aligned}$$

con lo cual $\beta = 1/2$ y $\alpha = 1/2$. Así, para el punto $Q_3(5/2, 2)$ sus coordenadas Baricéntricas son $(0, 1/2, 1/2)$.

c) Calcule las coordenadas Baricéntricas de Q_1^*.

d) Calcule las coordenadas Baricéntricas de Q.

Ahora Q está alineado a Q_2 y C, de igual manera que con Q_3 y A, de donde

$$
\begin{aligned}
Q &= tQ_2 + (1-t)C \\
&= sQ_3 + (1-s)A
\end{aligned}
$$

Ahora bien, tenemos que

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B \\
Q_3 &= \frac{1}{B} + \frac{1}{2}C
\end{aligned}
$$

sustituyendo en la expresión de Q obtenemos

$$t(\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B) + (1-t)C = s(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) + (1-s)A$$

al comparar elemento a elemento, observamos que $t/3 = s/2$, $1-t = s/2$, con lo cual $t = 3/4$ y con esto

$$Q = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C$$

las coordenadas Baricéntricas de $Q(5/4, 5/2)$ son $(1/2, 1/4, 1/4)$

c) Calcule las coordenadas Baricéntricas de Q_1^*.
Por una parte, tenemos que

$$Q_1^* = \alpha B + \beta Q$$

con $\alpha + \beta = 1$ dado que están en la mísma línea, pero

$$Q = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C$$

con esto

$$
\begin{aligned}
Q_1^* &= \alpha B + \beta(\frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C) \\
&= \frac{\beta}{2}A + \left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)B + \frac{\beta}{4}C
\end{aligned}
$$

pero Q_1^* es colineal a A y C, por lo que el término en B se anula, y con ello

$$\alpha + \frac{\beta}{4} = 0$$

y con la condición $\alpha + \beta = 1$, tenemos $\beta = 4/3$ y $\alpha = -1/3$. Con esto al punto $Q_1^*()$, le corresponde las coordenadas Baricéntricas $(2/3, 0, 1/3)$.

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta, no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.