I

a) Calcule las coordenadas Baricéntricas del Punto P

Los puntos que tenemos son: A(4,5), B(1,-6) C(11,4), P(3,-2)

Como P es el punto de equilibrio podemos encontrar sus coordenadas como combinación de A, B y C

Tenemos:

$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ es decir:

$(3,-2) = \alpha(4,5) + \beta(1,-6) + \gamma(11,4)$

Tenemos:

① $3 = 4\alpha + \beta + 11\gamma$

② $-2 = 5\alpha - 6\beta + 4\gamma$

③ $1 = \alpha + \beta + \gamma$

de ① y ③ tenemos

$$\begin{array}{l} 3 = 4\alpha + \beta + 11\gamma \\ \underline{-1 = -\alpha - \beta - \gamma} \\ 2 = 3\alpha + 10\gamma \end{array}$$

$3\alpha = 2 - 10\gamma$

$\alpha = \dfrac{2-10\gamma}{3}$

Sustituimos α en ②

$-2 = 5\left(\dfrac{2-10\gamma}{3}\right) - 6\beta + 4\gamma$

$6\beta = \dfrac{10 - 50\gamma + 6 + 12\gamma}{3}$

$\beta = \dfrac{10 - 50\gamma + 6 + 12\gamma}{18}$

$\beta = \dfrac{16-38\gamma}{18}$, $\beta = 4\left(\dfrac{2-10\gamma}{3}\right) + \dfrac{16-38\gamma}{18} + 11\gamma$

$\beta = \dfrac{8-40\gamma}{3} + \dfrac{16-38\gamma}{18} + 11\gamma$

$\beta = \dfrac{48 - 240\gamma + 16 - 38\gamma + 198\gamma}{18}$

$54 = 64 - 80\gamma$

$80\gamma = 64 - 54$

$80\gamma = 10$

$\gamma = \dfrac{10}{80} = \dfrac{1}{8}$

Ahora de ① y ③ tenemos:

$3 = 4\alpha + \beta + 11\gamma$

$-1 = -\alpha - \beta - \gamma$

donde sustituimos γ.

$3 - 11\left(\frac{1}{8}\right) = 4\alpha + \beta$

$-1 + \frac{1}{8} = -\alpha - \beta$

$\frac{13}{8} = 4\alpha + \beta$

$\frac{-7}{8} = -\alpha - \beta$. Ahora $\frac{6}{8} = 3\alpha$

$\alpha = \frac{2}{8} = \boxed{\frac{1}{4}}$

Tenemos que obtener el valor de β.

$1 = \alpha + \beta + \gamma$

$1 = \frac{2}{8} + \beta + \frac{1}{8} \implies 1 - \frac{3}{8} = \beta \implies \beta = \boxed{\frac{5}{8}}$

Hemos encontrado las coordenadas baricéntricas del punto P que son:

$P = \left(\frac{2}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right)$ que se pueden expresar como $(2, 5, 1)$

y $m_A = \frac{2}{8}$ $m_B = \frac{5}{8}$ y $m_C = \frac{1}{8}$

b) Calcule las coordenadas Baricéntricas de L, M, N.

Debemos tomar las masas concentradas en los puntos, A, B y C.

Observamos que L es el punto de equilibrio entre A y B, este depende de las masas de A y B. Esto implica que la suma entre A y B es 1

Entonces

L debe ser el centro de masa entre A y B.

$L = \frac{2A + 5B}{7}$

Por lo tanto las coordenadas baricentricas de L son:

$L\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)$, es 0 porque C no influye con el centro de masa.

Ahora tenemos a M como centro de masa entre B y C.

$M = \frac{5B + C}{6}$

Las coordenadas baricentricas de M son:

$M\left(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$

• Debemos obtener las coordenadas de N,
~~Tenemos~~ que N es el centro de masa entre A y C.

$N = \frac{2A+C}{3}$

entonces las coordenadas de N son: $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

c). Muestre que el triangulo ΔMNL esta en perspectiva con ΔABC

Observamos que, tomando a P como centro de perspectiva.

$\left.\begin{matrix} P\ A\ M \\ P\ B\ N \\ P\ C\ L \end{matrix}\right\}$ estan alineados, Observamos que se forman los triangulos ΔABC y ΔMNL

Tenemos

$P_1 = AB \cap MN.$

$P_2 = BC \cap NL$

$P_3 = CA \cap LM$

d). Calcule analiticamente el eje de perspectiva P_1, P_2 y P_3

• Observar la figura, donde se muestra el eje de perspectiva P_1, P_2, P_3.

Tenemos que

$\left.\begin{matrix} A\ B\ P_1 \\ N\ M\ P_1 \\ C\ B\ P_2 \\ N\ L\ P_2 \\ C\ A\ P_3 \\ M\ L\ P_3 \end{matrix}\right\}$ Estan alineados

e) Calcule las coordenadas baricentricas de P_1, P_2, P_3.

P_1 $\left.\begin{matrix} A\ B\ P_1 \\ N\ M\ P_1 \end{matrix}\right\}$ Alineados.

$P_1 = (1-t)N + tM. = (1-s)A + sB.$ Cambiar a N y M con terminos de A, B, y C

$P_1 = (1-t)\left(\frac{2A+C}{3}\right) + t\left(\frac{5B+C}{6}\right).$

$P_1 = \left[\frac{2}{3}(1-t)\right]A + \left[\frac{5}{6}t\right]B + \left[\frac{(1-t)}{3} + \frac{t}{6}\right]C$

P_1 está alineado con A y B entonces tenemos que el coeficiente de C es cero.

$$\frac{(1-t)}{3} + \frac{t}{6} = 0$$

$$1/3 - t/3 + t/6 = 0$$

$$1/3 - 2t/6 + t/6 = 0$$

$-t/6 = -1/3$, entonces $t = 2$.

Ahora obtenemos d

$$\frac{5}{6}t = d = \frac{5\cdot 2}{6} = \frac{5}{3}$$

Entonces:

$$P_1 = (1-s)A + sB$$

$$P_1 = \left(1-\frac{5}{3}\right)A + \frac{5}{3}B$$

$$P_1 = \frac{-2A + 5B}{3}.$$

- Entonces las coordenadas baricéntricas de $\boxed{P_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)}$

(P_2) $\left.\begin{matrix} C\,B\,P_2 \\ N\,L\,P_2 \end{matrix}\right\}$ están

$P_2 = (1-t)N + tL = (1-s)C + sB$, Debemos poner a N y L en términos de A, B y C.

$$P_2 = (1-t)\left(\frac{2A}{3} + C\right) + t\left(\frac{2A+5B}{7}\right)$$

$$P_2 = \left[\frac{2}{3}(1-t) + \frac{2}{7}t\right]A + \left[\frac{5}{7}t\right]B + \left[\frac{(1-t)}{3}\right]C$$

P_2 está alineado con C y B entonces $A = 0$

$$\frac{2}{3}(1-t) + \frac{2}{7}t = 0$$

$$\frac{2}{3} - 2/3\,t + 2/7\,t = 0$$

$$-\frac{8}{21}t = -2/3$$

$$t = 7/4$$

Ahora tenemos

$$\frac{5}{7}t = s = \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{5}{4}.$$

República

2) Considere el triangulo formado por los vertices $A(4,5)$, $B(1,-6)$, $C(11,4)$ y la recta $y = \frac{-x}{2} + 5$

a) Determina los puntos Q_1, Q_2, Q_3.

b) Calcule las coordenadas baricentricas de Q_1, Q_2, Q_3.

Tenemos que

$Q_1 = \alpha B + \beta C = (x, y)$

$(x_1, y_1) = (\alpha + 11\beta, -6\alpha + 4\beta)$

Tenemos:

① $\alpha + 11\beta = x_1$

② $-6\alpha + 4\beta = -\frac{1}{2}x + 5 = y$

③ $\alpha + \beta = 1$

Debemos resolver el sistema de ecuaciones

③ $\alpha = 1 - \beta$ sustituimos α en ①

$1 - \beta + 11\beta = x_1$

$1 + 10\beta = x_1 \longrightarrow$ ④

③ $\alpha = 1 - \beta$. sustituimos α en ②

$-6(1-\beta) + 4\beta = -1/2\, x_1 + 5$

$-6 + 6\beta + 4\beta = -1/2\, x_1 + 5$

$-11 + 10\beta = -1/2\, x \ldots$ ⑤

$-11 + 10\beta = -1/2\, x_1 \ldots (5)$

$-1 - 10\beta = -x_1$

$-12 = -3/2\, x_1$

$\therefore x_1 = 8.$

Tenemos que:

$y_1 = -\frac{1}{2}(8) + 5$

$y_1 = -4 + 5$

$y_1 = 1.$

$1 + 10\beta = 8$

$\beta = 7/10$

$\alpha = 1 - \beta$

$\alpha = 3/10$

entonces $\boxed{Q_1 = (8,1)}$

y las coordenadas baricentricas de Q_1 son: $\boxed{(0, 3/10, 7/10)}$

• Ahora obtenemos Q_3

tenemos que $Q_3 = \alpha A + \beta B = (x_1, y_1)$

$(x_1, y_1) = \alpha(4,5) + \beta(1,-6)$

$(x_1, y_1) = 4\alpha + \beta, 5\alpha - 6\beta.$

República

③

Entonces $(1-s)C + sB$

$P_2 = (1-5/4)C + 5/4 B$

$P_2 = \frac{-1C + 5B}{4}$

Entonces las coordenadas ~~buscan baric de P~~ $\boxed{\left(0, \frac{5}{4}, \frac{-1}{4}\right)}$

- Calcular las coordenadas de P_3

Tenemos que

$\left.\begin{array}{l} C\,A\,P_3 \\ M\,L\,P_3 \end{array}\right\}$ están alineados

$P_3 = (1-t)M + tL = (1-s)C + sA$, debemos poner a M y L en términos de A, B y C

$P_3 = (1-t)\left(\frac{5B+C}{6}\right) + t\left(\frac{2A+5B}{7}\right)$

$P_3 = \left[\frac{2t}{7}\right]A + \left[\frac{5}{6}(1-t) + \frac{5}{7}t\right]B + \left[\frac{(1-t)}{6}\right]C.$

P_3 está alineado con A y C. $\therefore B=0$

entonces

$5/6(1-t) + 5/7\,t = 0$

$5/6 - 5/6\,t + 5/7\,t = 0$

$-5/42\,t = -5/6 \Rightarrow \frac{2}{7}t = s = \frac{2}{7}\cdot 7 = 2.$

$t = 7.$

Entonces

$P_3 = (1-s)C + sA$

$P_3 = (1-s)C + sA$

$P_3 = (1-2)C + (2)A$

$P_3 = (-1)C + (2)A$

Entonces las coordenadas baricéntricas de P_3 son

$\boxed{(2, 0, -1)}$

República

Tenemos:

(1) $4\alpha + \beta = x_1$

(2) $5\alpha - 6\beta = y_1$ y $y_1 = -\frac{1}{2}x + 5$

(3) $\alpha + \beta = 1$

Resolvemos el sistema:

Tomando (3) $\alpha = 1 - \beta$ y sustituimos en (1) y (2)

$4(1-\beta) + \beta = x_1$ $5(1-\beta) - 6\beta = -1/2\, x_1 + 5$

$4 - 4\beta + \beta = x_1$ $5 - 5\beta - 6\beta = -1/2\, x_1 + 5$

$4 - 3\beta = x_1$ ... (4) $-11\beta = -1/2\, x_1$ ... (5)

Ahora de (4) y (5). (multiplicando a (5) por 2 tenemos)

$$\begin{array}{r} 4 - 3\beta = x_1 \\ -22\beta = -x_1 \\ \hline 4 - 25\beta = 0 \end{array} \Rightarrow \beta = 4/25,$$

$\alpha = 1 - 4/25$ ent $\alpha = 21/25$.

Ahora

$4 - 3(4/25) = x_1$

$4 - 12/25 = x_1$

$x_1 = 88/25$

$y_1 = -\left(\frac{88}{25}\right)\frac{1}{2} + 5 = \frac{81}{25}$

Entonces $\boxed{Q_3\left(\frac{88}{25}, \frac{81}{25}\right)}$

y sus coordenadas Baricéntrica son: $\boxed{\left(\frac{21}{25}, \frac{4}{25}, 0\right)}$

$Q_2 = \alpha A + \beta B + \gamma C$

$(x_1, y_1) = \frac{63}{115}(4,5) + \frac{24}{115}(4,-6) + \frac{28}{1115}(11,4).$

$x_1 = \frac{63}{115}(4) + \frac{24}{115}(4) + \frac{28}{115}(11)$, $x_1 = \frac{584}{115}$

$y_1 = \frac{63}{115}5 + \frac{24}{115}(-6) + \frac{28}{115}(4)$, $y_1 = \frac{283}{115}$

Entonces

$Q_2 = \left(\frac{584}{115}, \frac{283}{115}\right).$

c). Calcule las coordenadas baricéntricas de Q_1^*

$Q_1^* = \alpha B + \gamma Q$. Como $B\, Q\, Q_1^*$ Están en la misma linea, entonces

$\alpha + \gamma = 1$

Tenemos que

$Q = \frac{63}{103} A + \frac{12}{103} B + \frac{28}{103} C$

$Q_1^* = \left(\frac{63}{103}\gamma\right) A + \left(\alpha + \frac{12}{103}\gamma\right) B + \left(\frac{28}{103}\gamma\right) C$

Q_1^* es colineal a A y C entonces $B = 0$

$\alpha + \frac{12}{103}\gamma = 0 \; \ldots ①$ además $\alpha + \gamma = 1 \; \ldots ②$

$(1-\gamma) + \frac{12}{103}\gamma = 0$

$-\frac{91}{103}\gamma = -1$ entonces $\gamma = \frac{103}{91}$

$Q_1^* = \left(\frac{63}{103} \cdot \frac{103}{91}\right) A + \left(\frac{28}{103} \cdot \frac{103}{91}\right) C$

$Q_1^* = \frac{63}{91} A + \frac{28}{91} C$

$\boxed{Q_1^* = \left(\frac{63}{91}, 0, \frac{28}{91}\right)}$ Que son sus coordenadas baricéntricas

República

d) Calcule las coordenadas baricéntricas de Q

Tenemos que

$\left.\begin{array}{l} Q_1\ Q\ A \\ Q_3\ Q\ C \end{array}\right\}$ están alineados

$$Q = tQ_1 + (1-t)A = sQ_3 + (1-s)C$$

$$Q_1 = \frac{3B+7C}{10} \qquad Q_3 = \frac{21A+4B}{25}$$

$$t\left(\frac{3B+7C}{10}\right) + (1-t)A = s\left(\frac{21A+4B}{25}\right) + (1-s)C$$

$$(1-t)A + \left(\frac{3t}{10}\right)B + \left(\frac{7t}{10}\right)C = \left(\frac{21}{25}s\right)A + \frac{4s}{25}B + (1-s)C$$

$$(1-t) = \frac{21}{25}s \ldots (1) \qquad t = \left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{4}{25}\right)s = \left(1 - \frac{40s}{75}\right) = \frac{21}{25}s$$

$$\frac{3}{10}t = \frac{4}{25}s \ldots (2) \qquad t = \frac{40s}{75} \qquad \frac{103}{75}s = 1$$

$$s = 75/103.$$

$$Q = \left(\frac{25}{25}\cdot\frac{75}{103}\right)A + \left(\frac{4}{25}\cdot\frac{25}{103}\right)B + \left(1 - \frac{75}{103}\right)C$$

$$Q = \frac{63}{103}A + \frac{12}{103}B + \frac{28}{103}C$$

Entonces las coordenadas baricéntricas de Q son.

$$\boxed{\left(\frac{63}{103}, \frac{12}{103}, \frac{28}{103}\right)}$$