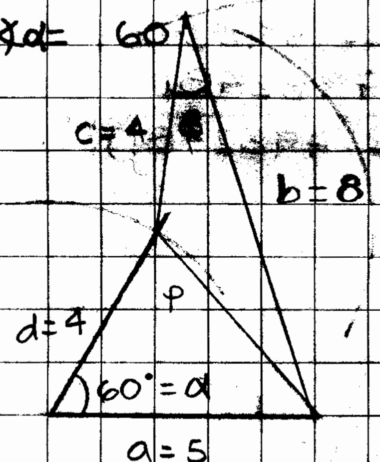
Vélez Mellado Patricia A. 4/oct./04

GEOMETRÍA ANALÍTICA I: TAREA-EXAMEN 2

1. Sea ABCD un cuadrilatero, con lados $a=5$, $b=8$, $c=4$, $d=4$, que se construye de la sig. forma:
- En el extremo del lado a se traza el lado d con un ángulo de inclinación α.
- Con centro en el otro extremo de a y radio 8 se traza un arco.
- Con centro en el extremo libre del lado d y con radio 4 se traza un arco. El punto de intersección de los dos arcos, con el que resulta un cuadrilatero convexo o entrante, es el cuarto vértice de ABCD.

* ii) $\sphericalangle \alpha = 60$



→ longitud de P

aplicando la ley de los cosenos:

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-P^2}{2ad}$$

$$\cos 60 = \frac{25+16-P^2}{2(5)(4)}$$

$$P^2 = 41 - 40\cos 60$$

$$|P| = \sqrt{21}$$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-P^2}{2bc} = \frac{16+64-21}{2(8)(4)} = 0.921875$$

$$\beta = 22.7982481$$

→ Para obtener el área del cuadrilatero se aplica la función $A(\theta)$:

$$A(\theta) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 1/2\, abcd\,(1+\cos\theta)}$$

con

$$s = a+b+c+d/2 = 5+8+4+4/2 = 10.5$$

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = (10.5-5)(10.5-8)(10.5-4)^2 = 580.9375$$

$\theta = \alpha + \beta$, α y β ángulos opuestos

$abcd = 640$

$\Rightarrow A(\theta)$ para el cuadrilátero ABCD es

$$A(\theta) = \sqrt{580.9375 - 320(1+\cos\theta)}$$

$A(\theta)$ está definida para:

$$580.9375 - 320(1+\cos\theta) \geq 0$$

esto se cumple para $\theta \neq 0$, pero dados las condiciones de construcción de ABCD, $\theta \geq 58.19338726°$

$\Rightarrow$ Para el caso i), con $\alpha = 60°$

$\theta_1 = \alpha + \beta$

Evaluando $A(\theta)$ para $\theta_1 = 60 + 22.7982481$
$= 82.7982481$

$$A(\theta_1) = \sqrt{580.9375 - 320(1+\cos 82.7982481)}$$
$$= \sqrt{220.821158}$$

$A(\theta_1) \approx 14.86005242$

ii) Para $\measuredangle\alpha = 70°$

$\Rightarrow$ longitud de p

aplicando la ley de los cosenos:

$$\cos 70° = \frac{a^2+d^2-p^2}{2ad}$$

$$\cos 70° = \frac{25+16-p^2}{2(5)(4)}$$

$$p^2 = 41 - 40\cos 70°$$

$$|p| = \sqrt{41 - 40\cos 70°} \simeq 5.22677661$$

$\Rightarrow$ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos:

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-p^2}{2cb} = \frac{16+64-(41-40\cos 70°)}{2(4)(8)} = 0.823137589$$

$\beta = 34.59987679$

Evaluando $A(\theta)$ para $\theta_2 = 70 + 34.5998768$

$\theta_2 = 104.5998768$

$$A(\theta_2) = \sqrt{580.9375 - 320(1 + \cos\theta_2)}$$
$$= \sqrt{341.5990287}$$
$$A(\theta_2) \approx 18.48239781$$

iii) Para $\alpha = 80°$

⇒ longitud de P:

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - P^2}{2ad}$$

$$\cos 80° = \frac{25 + 16 - P^2}{2(5)(4)}$$

$$P^2 = 41 - 40\cos 80$$

$$|P| = \sqrt{41 - 40\cos 80} \approx 5.835586765$$

⇒ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\text{coseno } \beta = \frac{c^2 + b^2 - P^2}{2cb} = \frac{16 + 64 - (41 - 40\cos 80)}{2(4)(8)}$$

$$= 0.717905111$$

$$\beta = 44.1182077 2$$

Para obtener el área del cuadrilatero.

evaluar $A(\theta)$ para $\theta_3 = 80 + 44.11820772$

$\theta_3 = 124.11820772$

$$A(\theta_2) = \sqrt{580.9375 - 320(1 + \cos\theta_3)}$$
$$= \sqrt{440.4261756}$$
$$A(\theta_3) \approx 20.98633307$$

iii) $\alpha = 90°$

→ longitud de p:

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-p^2}{2ad}$$

$$\cos 90° = \frac{25+16-p^2}{40}$$

$$p^2 = 25+16$$

$$|p| = \sqrt{41}$$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos:

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-p^2}{2bc} = \frac{16+64-41}{2(4)(8)} = 0.609375$$

$$\beta = 52.4556749$$

→ Área del cuadrilátero:

evaluar $A(\theta)$ para $\theta_3 = 90 + 52.4556749$
$= 142.4556749$

$$A(\theta_3) = \sqrt{580.9375 - 320(1+\cos\theta_3)}$$

$$= \sqrt{514.6397891}$$

$$A(\theta_3) \approx 22.68611446$$

iv) $100° = \alpha$

→ longitud de p:

aplicando la ley de los cosenos.

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-p^2}{2ad}$$

$$\cos 100 = \frac{25+16-p^2}{40}$$

$$p^2 = 41 - 40\cos 100$$

$$|p| = \sqrt{41-40\cos 100}$$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-p^2}{2cb} = \frac{16+64-(41-40\cos 100)}{64} = 0.5008448$$

$\beta = 59.94408684$

→ Área del cuadrilátero

evaluar $A(\theta)$ para $\theta_4 = 100 + 59.94408684$

$= 159.94408684$

$A(\theta_4) = \sqrt{580.9375 - 320(1+\cos\theta_4)}$

$= \sqrt{561.53219}$

$A(\theta_4) \approx 23.69667044$

v) $\alpha = 110°$

→ longitud de p

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-p^2}{2ad}$$

$$\cos 110° = \frac{25+16-p^2}{40}$$

$p^2 = 41 - 40\cos 110°$

$|p| = \sqrt{41 - 40\cos 110°}$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-p^2}{2cb} = \frac{16+64-(41-40\cos 110°)}{64} = 0.4150687$$

$\beta = 65.47635339$

→ Área del cuadrilátero

evaluar $A(\theta)$ para $\theta_5 = 110 + 65.47635339$

$= 175.47635339$

$A(\theta_5) = \sqrt{580.9375 - 320(1+\cos\theta_5)}$

$= \sqrt{579.9406577}$

$A(\theta_5) \approx 24.0819571$

vi) $\alpha = 120°$

→ longitud de P:

aplicando la ley de los cosenos:

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-P^2}{2ad}$$

$$\cos 120 = \frac{25+16-P^2}{40}$$

$$P^2 = 41 - 40\cos 120°$$

$$|P| = \sqrt{41-40\cos 120°}$$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-P^2}{2bc} = \frac{16+64-(41-40\cos 120°)}{64} = 0.296875$$

$$\beta = 72.7299953$$

→ Area del cuadrilatero

evaluar $A(\theta)$ para $\theta_6 = 120 + 72.7299953$

$= 192.7299953$

$$A(\theta_6) = \sqrt{580.9375 + 320(1+\cos\theta_6)}$$

$$= \sqrt{573.0716815}$$

$$A(\theta_6) = 23.93891563$$

vii) $\alpha = 130°$

→ longitud de P

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-P^2}{2ad}$$

$$\cos 130° = \frac{25+16-P^2}{40}$$

$$P^2 = 41 - 40\cos 130°$$

$$|P| = \sqrt{41-40\cos 130°}$$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-P^2}{2bc} = \frac{16+64-(41-40\cos 130°)}{64} = 0.207632743$$

$\beta = 78.01633904$

→ Area del cuadrilatero

evaluar $A(\theta)$ para $\theta_7 = 208.016339$

$$A(\theta_7) = \sqrt{580.9375-320(1+\cos\theta_7)} = \sqrt{543.487877} \approx 23.3131734$$

*i.a) $52° = \alpha$

→ longitud de P

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-P^2}{2ad}$$

$$\cos 52 = \frac{25+16-P^2}{40}$$

$$P^2 = 41-40\cos 52$$

$$|P| = \sqrt{41-40\cos 52}$$

→ ángulo β

aplicando la ley de los cosenos

$$\cos\beta = \frac{c^2+b^2-P^2}{2bc} = \frac{16+64-(41-40\cos 52)}{64} = 0.994163422$$

$\beta = 6.193387259$

→ área del cuadrilatero

evaluando $A(\theta)$ para $\theta_0 = 52 + 6.193387259$

$= 58.193387259$

$$A(\theta_0) = \sqrt{580.9375-320(1+\cos\theta_0)}$$

$$= \sqrt{92.28025789}$$

$$A(\theta_0) \approx 9.60626139$$

Como $A(\theta_5) = \sqrt{579.9406577}$ y

$A(\theta_6) = \sqrt{573.0716815}$ con $\theta_5 = 175.4763539$ y

$\theta_6 = 192.7299953$, $A(\theta)$ decrece entre estos valores de θ, lo que indica que hay un máximo en $(\theta_*, A(\theta_*))$ con $\theta_5 < \theta_* < \theta_6$.

Ahora se sabe que $\cos 180 = -1$ así que pareciera que $\theta_* = 180°$, por lo que ABCD sería un cuadrilátero convexo cíclico.

Ahora si hacemos $A'(\theta)$ y el procedimiento para hallar el máximo:

$$A(\theta) = (580.9375 - 320 - 320\cos\theta)^{1/2}$$

$$A(\theta) = (260.9375 - 320\cos\theta)^{1/2}$$

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}(260.9375 - 320\cos\theta)^{-1/2} \cdot 320\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$= \frac{160\,\mathrm{sen}\,\theta}{(260.9375 - 320\cos\theta)}$$

$$A'(\theta) = 0$$

$$\frac{160\,\mathrm{sen}\,\theta}{(260.9875 - 320\cos\theta)} = 0$$

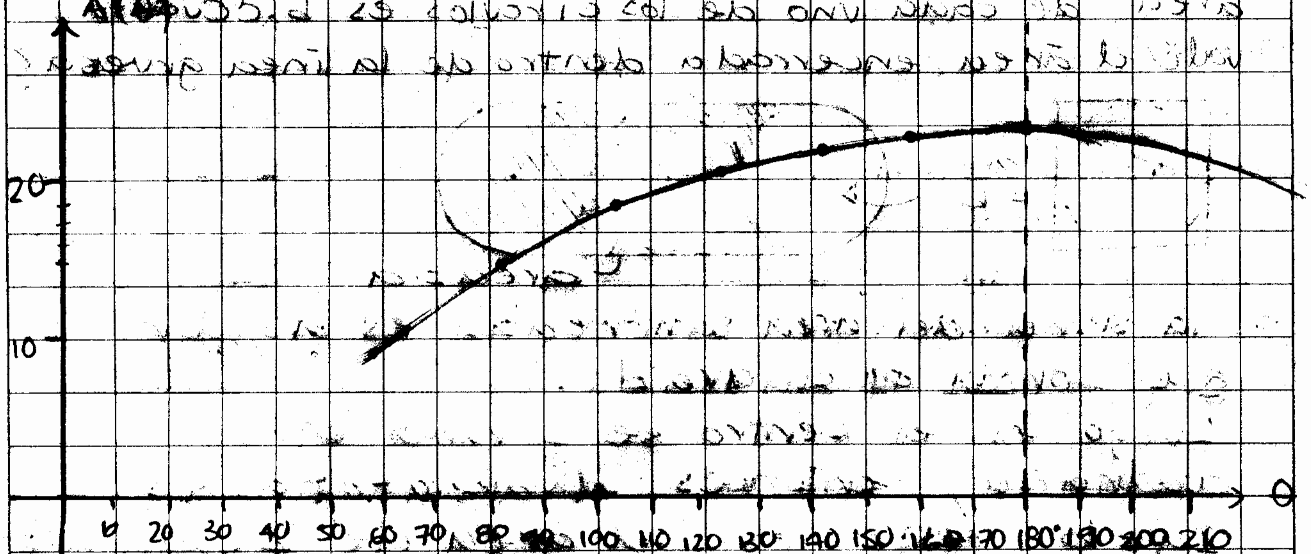
$$160\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\theta = 180$$

ya que para $\theta = 0$ $A(\theta)$ no está definida.

$\Rightarrow$ para $\theta = 180$ $A(\theta)$ tiene un máximo, esto es en el punto $(180; \sqrt{580.9375})$

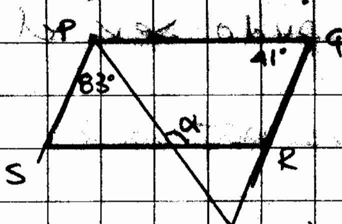
→ Gráfica $A(\theta)$



Además $A(\theta)$ es simétrica con respecto a la vertical que pasa por $\theta = 180°$.

2. Resolver:

P.4) En la figura, PQRS es un paralelogramo ¿Cuánto vale α?

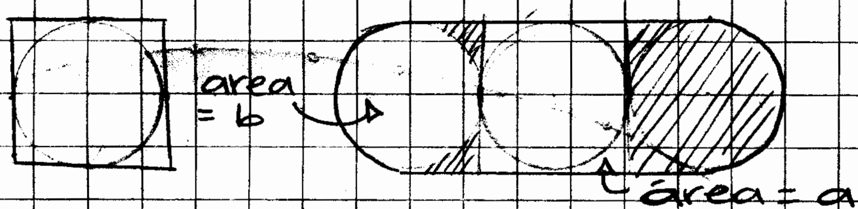


Como PQRS es un paralelogramo el $\sphericalangle PQR = \sphericalangle PSR = 41°$.
El ángulo α es un ángulo externo de un triángulo, por lo que es igual a la suma de los $\sphericalangle$'s no adyacentes a éste, es decir,

$$\sphericalangle P + \sphericalangle PSR = \alpha$$
$$83 + 41 = 124°$$

$\boxed{c)\ 124°}$

P.10) El área del cuadrado de la figura es a y el área de cada uno de los círculos es b ¿Cuánto vale el área encerrada dentro de la línea gruesa?



la suma del área sombreada es a, porque forma el cuadrado.
Luego en el centro se forma otro cuadrado, entonces el área total es $2a+b$, esto es, el área de 2 cuadrados más la de un círculo

$\boxed{e)\ 2a+b}$

P.13) A la mitad de un partido de futbol el Morelia iba ganándole al América con un marcador 3-1. Si en el segundo tiempo anotarón 7 goles entre ambos equipos, ¿cuál de los sig. no pudo ser el resultado del partido?
las combinaciones de números naturales que suman 7 son

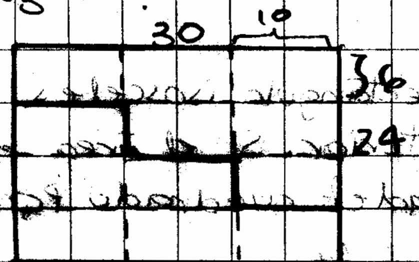
$7 = 5+2 \longrightarrow$ M-8, A-4 ó 5-M, A-7
$= 4+3$ marcador $\rightarrow$ M-7, A-5 ó 6-M, A-6
$= 6+1 \longrightarrow$ M-9, A-3 ó 4-M, A-8

$\Rightarrow$ Resultado que no puede ser es:

| (d) Morelia ganó por 3 goles |

P. 14) Un rectángulo de madera de 30 cm x 24 cm se cortó en dos piezas iguales, de manera que estas piezas puedan reensamblarse para formar otro rectángulo de 40 cm x 18 cm. ¿Cuál de las sig. figuras muestra el rectángulo original dividido en dos piezas?

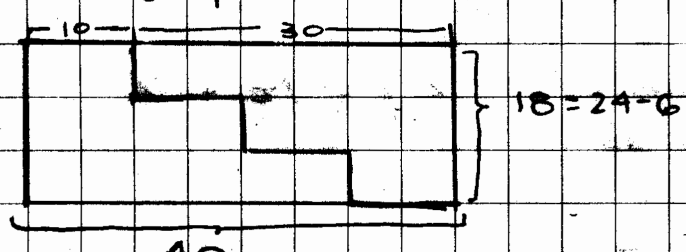
e)



• las líneas verticales dividen al segmento de longitud 30 en tres partes iguales de longitud 10.

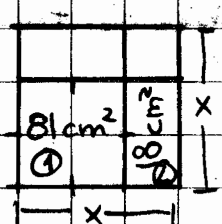
• las líneas horizontales dividen al segmento de longitud 24 en 4 partes iguales de longitud 6.

→ luego si se arma el nuevo rectángulo de la sig forma



se obtiene el rectángulo de 40 x 18

P. 18) ¿Cuánto vale x en la sig. figura



El área de cuadrado ① es 81 cm², esto es

$$l^2 = 81$$

$$|l| = \sqrt{81} = 9\ cm$$

→ luego $x = 9 + y$

Por otro lado el área del rectángulo ② es de 18 cm² y su lado de longitud mayor es igual al lado del cuadrado ①, es decir, 9 cm.

El área es

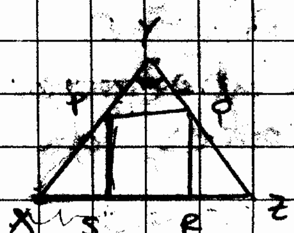
$9 \cdot y = 18$

$y = 2\,cm$

$\Rightarrow x = 9 + 2 = 11$

$\boxed{e)\ 11\,cm}$

P.20) El diagrama muestra un Δ rectángulo isósceles XYZ con un cuadrado PQRS en su interior. Si el área del Δ XYZ es 1, ¿Cuál es el área del cuadrado PQRS?



Como el Δ es rectángulo su altura por Y es igual al lado YX, ⇒ su área puede ser expresada como:

$$\frac{XZ \cdot YX}{2} = 1$$

pero como Δ es isósceles $XY = YZ = x$

$$\frac{x \cdot x}{2} = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$|x| = \sqrt{2}$$

Además es posible utilizar el Teorema de Pitágoras para obtener la longitud XZ

$$XZ = \sqrt{YZ^2 + YZ^2}$$

$$XZ = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$XZ = \sqrt{4} = 2$$

los Δ's YXZ y YPQ son semejantes y (YPQ es isósceles, $YP = YQ = y$)

$$\frac{YP}{YX} = \frac{YQ}{YZ} = \frac{PQ}{XZ}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{PQ}{2} \quad (i)$$

Por otro lado el Δ PSX también es semejante a YXZ (son rectángulos y sus lados son proporcionales), y una condición para esto es que PSX también sea isósceles con el ángulo recto entre los lados iguales, $\Rightarrow PS = PQ = XS$. Aplicando el T. de Pitágoras:

$$PX = \sqrt{PS^2 + XS^2} = \sqrt{PQ^2 + PQ^2}$$
$$= \sqrt{2(PQ)^2}$$
$$= \sqrt{2}\,PQ$$

Ahora $y = \sqrt{2} - PX$, por lo que

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,PQ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 - PQ)}{\sqrt{2}} = 1 - PQ$$

Sust. esto en i

$$1 - PQ = \frac{PQ}{2}$$
$$2 - 2PQ = PQ$$
$$2 = PQ + 2PQ$$
$$\frac{2}{3} = PQ$$

· Area del cuadrado:
$$PQ^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$\boxed{a)\ 4/9}$

· Problema 27. Si la longitud del lado de cada cuadrito es 1cm, ¿cuál ~~es el~~ área de la letra N?

El área del rectángulo es $6 \cdot 7 = 42 cm^2$

Luego el área de la N es

$42 - (12 + Area\ (\Delta_1) + Area\ (\Delta_2))$

· Area (Δ_1)

El Δ_1 es un Δ rectángulo de base 2cm y altura 6cm

$$area\ (\Delta_1) = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

· Area (Δ_2). El Δ_2 también es rectángulo de base 2 y altura 6

$$area\ (\Delta_2) = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6$$

((12 son los cuadritos no sombreados fuera de los Δ's)

Area (N):

$$area(N) = 42 - (12 + 6 + 6)$$
$$= 42 - 24$$
$$= 18$$

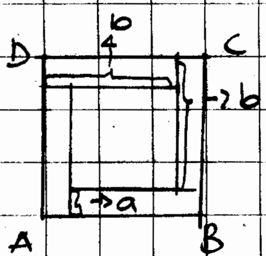
$\boxed{e)\ 18\ cm^2}$

P. 30) El cuadrado de la figura ABCD está formado por 4 rectángulos grises y un cuadrado blanco. Si el perímetro de cada uno de los rectángulos mide 40 cm ¿Cuál es el perímetro del cuadrado ABCD?

El perímetro de c/ rectángulo está dado por:

$$2a + 2b = 40$$

$$a+b = \frac{40}{2} = 20$$



ahora el lado del cuadrado ABCD es b+a, esto es 20 por lo que el perímetro es $4(b+a) = 4(20) = 80$

| c) 80 cm |

P. 33) Dos cuadrados del mismo tamaño cubren a un círculo de radio 3, ¿cuánto vale el área sombreada?

El círculo está inscrito en un cuadrado de lado $2r = 6$, este cuadrado contiene a su vez a los 2 cuadrados de tamaño igual.

La diagonal de este cuadrado pasa por el centro del círculo, además los puntos de la diagonal del cuadrado blanco también están en está diagonal. La diagonal del cuadrado blanco es de la misma longitud del diametro del círculo, porque está inscrito en él.

Si se traza la 2ª diagonal del cuadrado blanco (pasa por el centro del círculo) se obtienen 4 Δ's rectángulos isósceles con lados 3,

luego el área de c/ Δ es

$A = \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

El área del cuadrado blanco es:

$4A = 4\left(\frac{9}{2}\right) = 18$

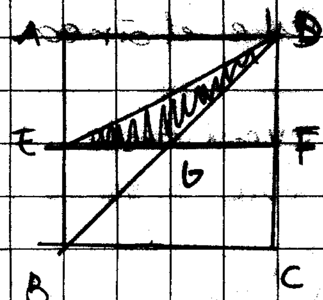
Por lo que el área de la región sombreada es:

$A^* = \text{área círculo} - \text{área}(\square)$

$A^* = 9\pi - 18$

$\boxed{c)\ 9\pi - 18}$

P. 36) En la figura ABCD es un cuadrado, E y F son los puntos medios de AB y CD, y AB = 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



Como E es el punto medio de AB y AB = 1, $AE = \frac{1}{2}$

• DB es la diagonal de ABCD por lo que pasa por el punto medio de EF*,

$EF = 1 \Rightarrow EG = \frac{1}{2}$

* los Δ's BEG y ABD son semejantes, con una proporción igual a 2

$\frac{BA}{EA} = \frac{AD}{EG} = 2$

$\frac{AD}{EG} = 2$

$EG = \frac{AD}{2}$

los Δ's DBE y DBC también son semejante con proporción 2

$$\frac{DC}{DF} = \frac{BC}{GF} = 2$$

$$GF = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} = EG$$

→ Si se considera el Δ EGD vemos que:

base $= EG = \frac{1}{2}$

altura $= AE = \frac{1}{2}$

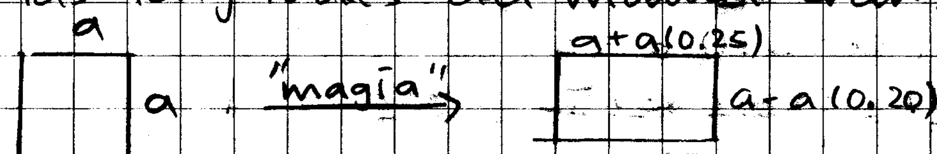
Area $\left(\overset{G}{\underset{E\ \ D}{\Delta}}\right) = \frac{(1/2)(1/2)}{2} = \frac{1}{8}$

Que es precisamente el área sombreada

$\boxed{e)\ 1/8}$

P.37) Merlín tocó con su varita mágica un mantel cuadrado y lo convirtió en un mantel rectángular. Sabiendo que dos de sus lados opuestos aumentaron un 25% y que los otros dos se redujeron 20%, ¿en que momento el área del mantel fue mayor?

las longitudes del mantel eran:



área $= a \cdot a = a^2$

$$\text{area} = (a+0.25a)(a-0.20a)$$
$$= a^2 - 0.20a^2 + 0.25a^2 - 0.05a^2$$
$$\text{area} = a^2$$

c) Tenía la misma área siendo cuadrado que siendo rectángular.

P.40. En la figura ABCD es un cuadrado y E, F, G y H son los puntos medios de sus lados. Sabiendo que el círculo que está inscrito en el cuadrado EFGH tiene area π, ¿cual es el área de ABCD?

El círculo inscrito en el cuadrado EHGF tiene radio

$$r^2\pi = \pi$$
$$|r| = 1$$

el diametro es igual al lado EH, porque es paralelo a éste y a FG, y el círculo es tangente a los lados del cuadrado,

$\Rightarrow$

$$EH = 2r$$
$$EH = 2$$

el área de EFGH es $2 \cdot 2 = 4$

• el Δ HDG es rectángulo e isósceles ((HD = DG) porque H y G son puntos medios de AD y DC) $HG = 2$

por el T. de Pitágoras

$$\cancel{2 = \sqrt{HD^2 + DG^2}}$$
$$2 = \sqrt{HD^2 + HD^2}$$
$$2 = \sqrt{2HD^2}$$
$$2 = \sqrt{2}\, HD^2$$
$$HD = \frac{2}{\sqrt{2}} = DG$$

• el área del Δ HDG es

$$\text{Area}\left(\underset{H\ \ G}{\overset{D}{\Delta}}\right) = \frac{(2/\sqrt{2})^2}{2} = \frac{4/2}{2} = 1$$

los Δ's ABH, HDG, EBF y FCG son congruentes (criterio LAL)

el área sombreada es

$$4\left(\text{area}\left(\underset{H\ \ G}{\overset{D}{\Delta}}\right)\right) = 1 \cdot 4 = 4\,u^2$$

El área del cuadrado ABCD es

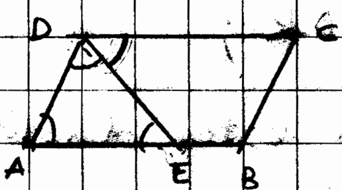
área ($\square$) = área sombreada + Área ($\square$)

$= 4 + 4$

$= 8\ u^2$

$\boxed{b)\ 8}$

P. 53) En la figura ABCD es un paralelogramo y $\measuredangle ADE = \measuredangle EDC$. Sabiendo que $AD = 5$ y $DC = 6$ ¿cuánto mide EB?



$\measuredangle EDC = \measuredangle DEA$, son alternos internos de una paralela

Como $\measuredangle EDC = \measuredangle ADE = \measuredangle DEA$ el Triángulo ADE es isósceles y $DA = AE = 5$

luego

$AB = AE + EB$

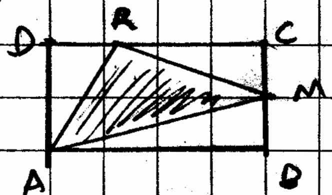
$AB = DC = 6 = AE + EB$

$6 = 5 + EB$

$EB = 1$

$\boxed{e)\ 1}$

P.55) En la figura ABCD es un rectángulo de área 32, M es punto medio de BC, DR = BM y 2AD = AB. ¿Cuál es el área del Δ ARM?



El área del rectángulo es 32, y $2AD = AB$

$\Rightarrow AD \cdot AB = 32$

$AD \cdot 2AD = 32$

$2AD^2 = 32$

$|AD| = 4$

De lo anterior

$AD = 4$; $AB = 8$; $CM = MB = 2 = DR$;

$RC = DC - DR = 8 - 2 = 6$.

luego el área del Δ ARM está dada por:

$$A(\triangle ARM) = A(\square ABCD) - [A(\triangle DAR) + A(\triangle CRM) + A(\triangle MAB)]$$

$\Rightarrow$ Area $(\triangle DAR)$, Δ DAR es rectángulo

$$A = \frac{DA \cdot DR}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

$\Rightarrow$ Area $(\triangle CRM)$, Δ CRM es rectángulo,

$$A = \frac{CM \cdot RC}{2} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

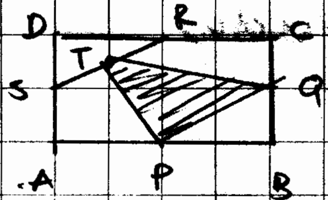
$\Rightarrow$ Area Δ MAB, Δ MAB es rectángulo

$$A = \frac{MB \cdot AB}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$$

Area $(\triangle ARM) = 32 - (4 + 6 + 8) = 14$

$\boxed{(4)\ 14}$

P. 59) En la figura ABCD es un rectángulo, P, Q, R y S son los puntos medios de sus lados y T es el punto medio del segmento RS. Si el área de ABCD = 1 ¿cuál es el área del Δ PQT?



Para que

$DA \cdot AB = 1$

$DA = x$ y $AB = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow A = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

$DR = AP = RC = PB = \frac{x}{2}$; y

$DS = SA = CQ = QB = \frac{1}{2x}$

Por otro lado, Δ DSR es rectángulo
Por el T. de Pitágoras

$SR^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}$

$A(\Delta DSR) = A(\Delta QPB) = A(\Delta SAP) = A(\Delta RCQ)$
Porque los Δ's son congruentes (LLL)

$A(\Delta DSR) = \frac{DR \cdot DS}{2} = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2x}}{2} = \frac{\frac{x}{4x}}{2} = \frac{1}{8}$

el área del rectángulo SRQP es

$A(ABCD) - 4(4(\Delta DSR)) = 1/2$

Pero como Δ's SAP = PBQ = QCR = RDS
resulta que SRQP es un cuadrado de lado SR.

El área de Δ STP está dada por

$$\frac{SR \cdot SR}{2}$$

se sabe que

$$SR^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{área del cuadrado})$$

y además

$$SR^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x^4+1}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

de lo que se obtiene un polinomio de 4° grado

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0,$$

el cual es posible factorizar como

$$(x-1)(x-1)(x+1)(x+1) = 0$$

ahora, como x es una longitud tomamos la raíz positiva, $x = 1$

$\Rightarrow$

$$SR = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El área de los Δ's STP y RTQ (rectángulos y congruentes LAL) es:

$$\text{Area}(\overset{T}{\underset{P\ \ S}{\Delta}}) = \frac{SR/2 \cdot SR}{2} = \frac{(1/\sqrt{2})/2 \cdot 1/\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1/2\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2}}{2} = \frac{1/4}{2} = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ El área del Δ PQT es

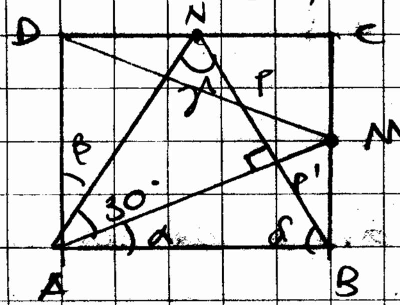
$$\text{Area}(\overset{T}{\underset{P\ \ Q}{\Delta}}) = A(\overset{S\ \ R}{\underset{P\ \ Q}{\square}}) - 2A(\overset{T}{\underset{S\ \ P}{\Delta}})$$

$$= 1/2 - 1/4$$

$$= 1/4$$

$\boxed{e)\ 1/4}$

P: 65) En la figura ABCD es un rectángulo, M y N son los puntos medios de BC y CD, y P es la intersección de DM y BN. Si sabemos que ∡MAN = 30°, ¿Cuánto vale ∡BPM?



Observamos que

$\alpha + \beta + 30° = 90°$

y además el ∡AP'N = 90°, porque NB es perpendicular a AM.

Considerando el Δ AP'N tenemos que,

$30° + 90° + \gamma = 180$

$\gamma = 60$

Como NA = NB el Δ es isósceles y

$30 + \alpha = \delta$, luego

$30 + \alpha + \delta + \gamma = 180°$

$2(30 + \alpha) + 60 = 180$

$60 + 2\alpha + 60° = 180$

$\alpha = 30°$

ahora,

$30 + \beta + 30 = 90°$

$\beta = 30°$

luego ∡DAM = $\beta + 30°$ y como DM = AM, ∡DAM = ∡ADM = 60° por lo que ∡DMA = $-(60° + 60°) + 180° = 60°$.

⇒ El ∡NP'M es suplementario con ∡NP'A,

$90 +$ ∡NP'M $= 180°$, ∡NP'M $= 90°$

Considerando el Δ PP'M tenemos:

∡NP'M + ∡AMD + ∡BPM = 180°

$90 + 60° +$ ∡BPM $= 180°$

∡BPM = 30°

(b) 30°

P.66) En la figura se muestran 4 cuadrados sobrepuestos con lados que miden 11, 9, 7 y 5. ¿Cuánto vale el área de las regiones grises menos el área de las regiones negras?

⇒ El área de la región gris es

$(11)^2 + (7)^2 - (i + ii + iii)$

⇒ El área de la región negra es:

$(9)^2 + (5)^2 - (i + ii + iii)$

donde $i + ii + iii$ es el área de la intersección de los 3 cuadrados.

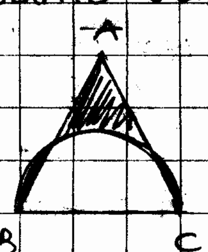
la diferencia es:

$[11^2 + 7^2 - (i+ii+iii)] - [9^2 + 5^2 - (i + ii + iii)]$

$[11^2 + 7^2] - [9^2 + 5^2] = 64$

$\boxed{d)\ 64}$

P.68) En la sig. figura el ΔABC es equilátero, tiene lado 2 y la semicircunf. tiene diámetro BC ¿Cuánto vale el área sombreada?



- El área del ΔABC está dada por: (por la fórmula de Herón)

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

con $s = \frac{2+2+2}{2} = 3$

$A = \sqrt{3(3-2)^3}$

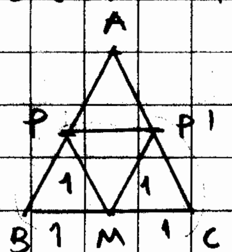
$A = \sqrt{3}$

- El área del semicírculo es

el radio es $r = BC/2 = 2/2 = 1$

$A' = \frac{\pi \cdot (1)^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

→ El semicírculo corta al Δ en los puntos medios de los lados AC y AB:



M es el punto medio de BC, $BM = MC = 1$, el radio del semicírculo es 1 por lo que los Δ's $P'MC$ y PBM son equiláteros de lado 1:

* $P'C < 2$ y $\measuredangle P'CM = 60° = \measuredangle CP'M$

por lo que $\measuredangle P'MC = 60$ y el Δ es equilátero.

$$\Rightarrow PP' = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

→ se obtiene un cuadrilátero $PP'BC$ con $\measuredangle$'s opuestos suplementarios; $\measuredangle PP'C = 120°$ y $PBC = 60°$ y

$a(PP'BC) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

con $s = \frac{1+1+1+2}{2} = \frac{5}{2}$

$a(PP'BC) = \sqrt{27}/4$

→ luego el área del $\Delta APP'$ está dada por

$$\text{area}(\Delta ABC) - A(PP'BC) = \sqrt{3} - \sqrt{27}/4 = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{27}}{4}$$

→ el área de las 3 regiones iguales formadas por el semicírculo y el cuadrilátero es

area semicírculo − area $PP'BC$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{27}}{4}$$

y cada región tiene área

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{27}}{4}\right)\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{27}}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

el área sombreada es:

$$\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

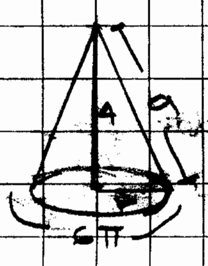
$$= \sqrt{3} - 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\pi}{6}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$\boxed{d)\ \pi/6}$

P. 71. Un trozo de papel en forma de sector circular se dobla para formar un cono. Si la altura del cono es 4 y la base es un círculo de perímetro 6π, ¿cuál es el área del trozo de papel?



base círculo perímetro 6π

$\Rightarrow$ radio $= 3$

Es posible obtener a por el T. de Pitágoras, pues la altura es perpendicular al radio r:

$$a = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$\Rightarrow$ el radio del círculo $\mathcal{C}$ del cual forma parte el trozo de papel es 5.

luego área $\mathcal{C}$: Perímetro $\mathcal{C}$

$A = \pi r^2 = \pi 25$ $\quad$ $P = 2r\pi = 10\pi$

• si observamos la relación que hay entre el perímetro y el área de $\mathcal{C}$:

$$10\pi \cdot x = 25\pi$$

$$x = 2.5$$

si se multiplica esto por 6π que es el perímetro del papel obtenemos su área:

$A(\text{papel}) = 2.5 \cdot 6\pi = 15\pi$

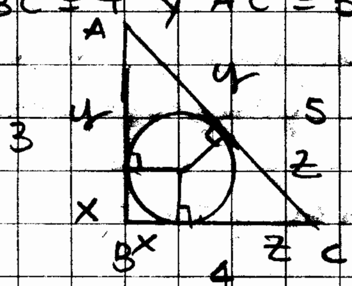
Para comprobar el resultado

$$A(\zeta) = 15\pi + (2.5 \cdot 4\pi)$$
$$= 25\pi$$

que es precisamente el área de ζ.

$\boxed{e)\ 15\pi}$

P. 79) En la figura ABC es un Δ rectángulo, $AB = 3$, $BC = 4$ y $AC = 5$ ¿cuánto mide el radio del círculo



Como el círculo es tangente a los lados del Δ es posible trazar los radios perpendiculares a los lados AB, BC y AC de la sig. forma:

estos radios dividen a los lados en partes correspondientes iguales

→ luego

$x + z = 4 \quad (1)$

$y + z = 5 \quad (2)$

$y + x = 3 \quad (3)$

Como el círculo es tangente al Δ, $x = r$

$z = 5 - y \quad (2)$

$y = 3 - x \quad (3)$

$\Rightarrow z = 5 - (3 - x) = 2 + x$

sust. en (1)

$x + 2 + x = 4 \qquad x = 1 = r$

$2x + 2 = 4$

$\boxed{a)\ 1.}$

P.75) El semicírculo de la figura tiene radio 2. El punto P es el punto medio del arco AB y los segmentos PC y PD dividen al semicírculo en 3 regiones de áreas iguales ¿cuánto mide CD?

área del semicírculo:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 4}{2} = \pi 2$$

como PC y PD dividen al semicírculo en 3 regiones de área igual, el área del ΔPCD es

$$\text{Area}\left({}_{C}\overset{P}{\Delta}{}_{D}\right) = \frac{\pi 2}{3}$$

- la mitad del diametro perpendicular a AB es la altura del ΔPCD y es igual al radio, igual a 2

$\Rightarrow$ el área $\left({}_{C}\overset{P}{\Delta}{}_{D}\right)$ está dada por:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{CD \cdot 2}{2}$$

de lo anterior $CD = \frac{2\pi}{3}$

$\left|\, b)\ \frac{2}{3}\pi \,\right|$

P.76) ¿Cuántos enteros positivos menores que 100 cumplen que la suma de sus cifras es menor que 10?

Observemos:

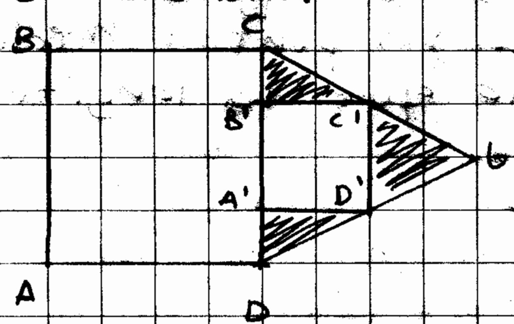
1-10 : 10	30-40 : 7	60-70 : 4
10-20 : 9	40-50 : 6	70-80 : 3
20-30 : 8	50-60 : 5	80-90 : 2

$\Rightarrow$ el # de naturales que cumplen esto es:

$10+9+8+7+6+5+4+3+2 = 54$

$|\, e)\ 54 \,|$

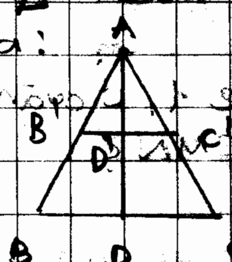
P. 88) Cada lado del cuadrado grande de la figura mide 2 y mientras que cada lado del cuadrado pequeño mide 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



C'D' es paralela a CD y además su longitud es $\frac{1}{2}$ CD, por lo que C'D' pasa por los puntos medios de los lados del ΔCDG.

- Como C'D' corta a CG y DG en sus puntos medios, también corta a la altura del Δ CDG en su punto medio:

Sea:



los Δ's ABC y AB'C' son semejantes con proporción 2

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{BC'} = 2$$

si se consideran los Δ's ADC y AD'C, estos también son semejantes y en la misma razón de ABC y AB'C',

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{AC}{AC'} = 2$$

$\Rightarrow$ la longitud de $DC = 2D'C'$ y $DC \parallel D'C$ por lo que D' es el punto medio de AD.

Luego la altura del Δ CDG = 2 y la base = CD = 2

$\Rightarrow$ Area $(\overset{G}{\underset{C\ D}{\Delta}}) = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

y el área sombreada es:

$A(\overset{G}{\underset{C\ D}{\Delta}}) - A(\overset{C'\,D'}{\underset{B'\,A'}{\square}}) = 2 - 1 = 1$

$\boxed{a)\ 1}$

P.96) En la figura ABC es un triángulo de área 32, AB = AC y BC = 8, ¿Cuál es el área del cuadrado DEFG?

Como DEFG es un cuadrado el segmento DE corta a AC y AB en sus puntos medios, es paralelo a CB. Por lo que la longitud de DE es $\frac{1}{2}$ CB.

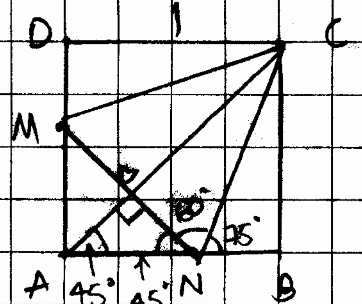
$$DE = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

El área de DEFG es:

$$A(\square DEFG) = 4^2 = 16$$

d) 16

P.98) Cada lado del cuadrado ABCD mide 1, ¿cuánto vale el área del Δ equilátero CMN?



El $\measuredangle$ CNM = 60° porque el Δ CMN es equilátero.

- $\measuredangle$ AGN es recto porque MN es perpendicular a AC
- Luego en el Δ AGN el $\measuredangle$ GAN = 45° porque AC es la diagonal de ABC, por lo que $\measuredangle$ GNA = 45°.

$\Rightarrow$ el $\measuredangle GNA + \measuredangle MNC + \measuredangle CNB = 180°$,

$45° + 60° + \measuredangle CNB = 180$

$\measuredangle CNB = 75°$

Considerando al Δ CNB, se tiene que

sen $\measuredangle$ CNB = CB / CN

sen 75 = 1 / CN

CN = 1 / sen 75°

de lo anterior resulta que cada lado del Δ CNM es $CN = \dfrac{1}{\text{sen } 75^\circ} = MN = CM$

su área está dada por (aplicando la f. de Herón):

$$A = \sqrt{s\left(s - \frac{1}{\text{sen}75^\circ}\right)^3}$$

con $s = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{\text{sen } 75^\circ}\right) = \dfrac{3}{2\,\text{sen } 75^\circ}$

$$A = \sqrt{\left(\frac{3}{\text{sen}75^\circ}\right)\left(\frac{3}{2\,\text{sen}75^\circ} - \frac{1}{\text{sen}75^\circ}\right)^3}$$

$$\begin{aligned}
\text{sen } 75 &= \text{sen } (30^\circ + 45^\circ) \\
&= \cos 30^\circ \text{ sen } 45 + \text{sen } 30^\circ \cos 45^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\text{sen}75^\circ} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

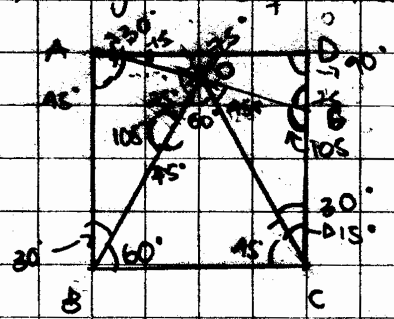
$$A = \sqrt{3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{3}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)\right)^3}$$

$$= \sqrt{3\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^3}$$

$$\underline{A = 2\sqrt{3} - 3}$$

$$\boxed{\text{d) } A = 2\sqrt{3} - 3}$$

P.38. En la figura ABCD es un cuadrado y OBC es un triángulo equilatero, ¿cuánto mide ∡ OAC?



El ∡ OBC = 60° = ∡ BOC = ∡ BCO
porque el △ OBC es equilatero

⇝ El ∡ ABC = 90 = ∡ OBC + ∡ OBA
de esto ∡ OBA = 30°

⇝ luego el ∡ CAB = 45° porque AC es la diagonal de ACDB. El ángulo ∡ ACB también mide 45 por la misma razón.

Como ∡ OCB = 60°, ∡ OCA = 15°.

El ∡ DCB = ∡ ACB + ∡ OCA + ∡ DCO

$$90 = 45° + 15 + ∡ DCO$$

$$∡ DCO = 30$$

Considerando el △ OGC se tiene que
∡ COG = 45° y
el ángulo ∡ OGC = -(30° + 45) + 180
= 105°

el ángulo DGA es suplementario de ∡ OGC, esto es ∡ DGA = 75. Considerando △ ADG;

∡ ADG + ∡ DGA + ∡ DAG = 180

$$90 + 75 + ∡ DAG = 180$$

$$∡ DAG = 15.$$

El ∡ CAD = 45 y
∡ CAD = ∡ DAG + ∡ OAC

$$45 = 15 + ∡ OAC$$

$$\boxed{∡ OAC = 30}$$