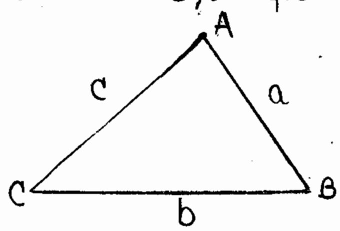
AREA EXAM N I

Cindy Olivares del Monte
Geometría Analítica
Profesor: Pablo Barrera

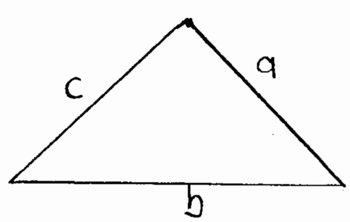
Ejercicio 1.10.1 **Muestre que lo lados a,b,c de un triángulo cumplen que $|a-b| < c$.**

Por la desigualdad del triángulo, sabemos que la suma de las longitudes de 2 de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. Donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo. Se cumple que



$$a+b>c$$
$$a+c>b \Rightarrow a-b>-c \Rightarrow b-a<c$$
$$b+c>a \Rightarrow b-a>-c \Rightarrow a-b<c$$

Ejercicio 1.10.2 **Muestre que lo lados a,b,c de un triángulo cumplen que $c < \dfrac{a+b+c}{2}$.**



Por el la desigualdad del triángulo, sabemos que

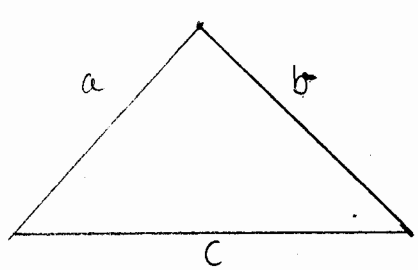
$$a+b>c$$

Por el axioma de orden "Monotonía"

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a<b \Rightarrow a+c<b+c$$

Entonces
$$a+b+c>c+c$$
$$a+b+c>2c$$
$$\frac{a+b+c}{2}>c \quad \text{o bien} \quad c<\frac{a+b+c}{2}$$

Ejercicio 1.10.3 **Muestre que es posible construir un triángulo con segmentos de longitudes a, b, c, si y sólo si existen números positivos x, y, z tales que $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.**



Sabemos, que si a, b, y c son números positivos tales que $a+b>c$, $a+c>b$ y $c+b>a$, entonces existe un triángulo de lados a, b y c.

Tenemos que
$$a=x+y \Rightarrow x=a-y$$
$$b=y+z \Rightarrow y=b-z$$
$$c=z+x \Rightarrow z=c-x$$

Sustituyendo
$$\begin{aligned} x &= a-y \\ &= a-(b-z) \\ &= a-b+z \\ &= a-b+(c-x) \\ x &= a-b+c-x \end{aligned}$$

$$2x = a-b+c$$
$$\boxed{x=\frac{a-b+c}{2}} \; 1$$

Continuá. Ejercicio 1.10.3

Sustituy. $y = b - z$

$y = b - (c - x)$

$= b - c + x$

$= b - c + (a - y)$

$= b - c + a - y$

$2y = b - c + a$

$\boxed{y = \frac{b + a - c}{2}}$

Sustituy. $z = c - x$

$z = c - x$

$= c - \left[\frac{a - b + c}{2}\right]$

$z = \frac{2c - a + b - c}{2}$

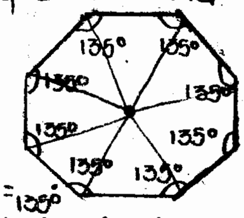
$\boxed{z = \frac{c + b - a}{2}}$

Por lo tanto, a, b y c son lados de un triángulo $\Leftrightarrow$ se cumple lo anterior

Ejercicio 1.10.4 **¿Cuánto mide el ángulo interior de un octagono regular?**

Por el teorema 1.3.1 sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Dibujamos un octagono regular.



O bien, aplicamos $(n-2) \times 180°$
$= 6 \times 180 = 1080 \div 8 = 135°$

Sabemos que hay 8 triángulos con vértice en el centro

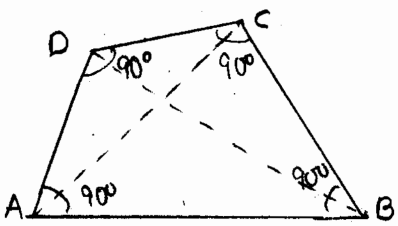
$180 \times 8 = 1440$

De donde $1440 - 360° = 1080°$

Por lo tanto, c/ ∡ mide $1080° \div 8 = 13$

Ejercicio 1.10.5 **La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es (n-2) * 180°.**

Trazamos un cuadrilátero convexo (Todas sus diagonales están dentro del cuadrilátero

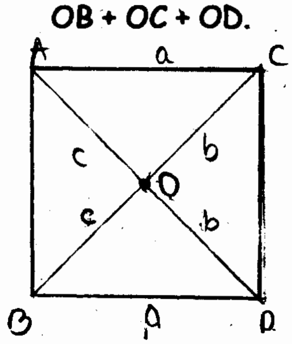


$\underbrace{(n-2)}_{\text{No. de diagonales}} \cdot 180° = (4-2) \cdot 180° = 360°$

$360° \div 4 = 90°$

En este la suma de los ∡ interiores de un cuadrilátero es igual a 360°

Ejercicio 1.10.6 **Sea ABCD un cuadrado y O un punto del plano. Muestre que OA< OB + OC + OD.**



Por la desigualdad del triángulo sabemos que

"Para cualquier triángulo la suma de las longitudes de 2 de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.

Esto es aplicado al triángulo ACO que

$a+b > c \Rightarrow AC + CO > OA$

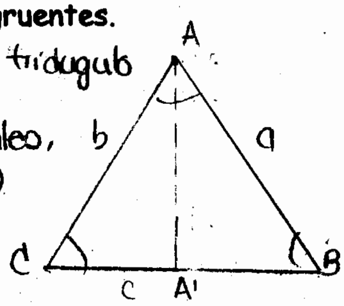
$a+c > b \Rightarrow AC + OA > OC$

$b+c > a \Rightarrow OC + OA > AC$

(continúa...)

Ejercicio 1.10.7 **Si en un triángulo isósceles trazamos la altura que pasa por el ángulo que forman los dos lados iguales, entonces los triángulos que resultan son congruentes.**

Dibujamos un triángulo isósceles.
(2 lados iguales, 2 ∡ iguales)



Sabemos que AC = AB y si A' es el punto medio de BC, entonces los triángulos ABA' y ACA' son congruentes.

Por el tercer criterio de congruencia, si tenemos 2 triángulos con 3 lados iguales entonces son congruentes lado-lado-lado y se denota LLL.

Es decir, como los lados AB, AA' y BA' del triángulo ABA' son congruentes a los lados AC, CA' y AA' del triángulo ACA' por el 3er criterio de congruencia LLL los 2 ∆s son congruentes

(Continúa...)

Continúa . . Ejercicio 1.10.7

Aplicando el teorema de Pitágoras y aplicando el Lema 1.5.7.

"Si ABC es un triángulo y AD es perpendicular a BC, se tiene que:

$$AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$$

ya que un rectángulo se divide en 2 triángulos isósceles y sabemos que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos tenemos.

Aplicado a los Δs rectángulos: ABA' y $AA'C$ se tiene:

$$AB^2 = AA'^2 + A'B^2 \quad y \quad AC^2 = AA'^2 + A'C^2$$

Entonces, $BA' = CA'$ ya que: $A'B^2 = AB^2 - AA'^2$ y $A'C^2 = AC^2 - AA'^2$

Como AB y AC entonces se demuestra que $BA' = CA'$.

Continúa... Ejercicio. 1.10.6.

Aplicado a BOD tenemos que

$$a+b>c \Rightarrow BO + OD > BO$$

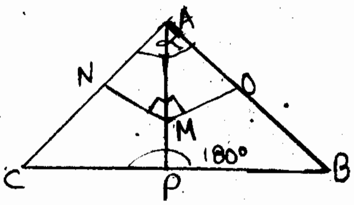
$$a+c>b \Rightarrow BD + BO > OD$$

$$b+c>a \Rightarrow OD + BO > BD$$

Por lo tanto, $OA < OB + OC + OD$

Ejercicio 1.10.8 **La bisectriz del ángulo distinto en un triángulo isósceles es perpendicular al lado opuesto a este vértice.**

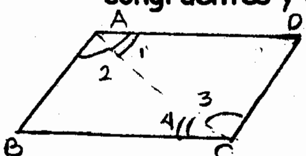
Sabemos que la bisectriz interna del ∡ CAB del triángulo ABC es la recta por A que divide al ángulo en 2 ángulos iguales. (El ∡ACB = ∡ABC)



- Cada punto M de la bisectriz equidista de cada lado del ∡. Si N es el pie de la perpendicular de M sobre AC y O lo es para M sobre AB, entonces MN = MO y como AC = AB, por lo tanto los triángulos AMN y AMO son iguales. Por el teorema de Pitágoras, ∡ MAN = ∡ MAO, es decir, M se halla sobre la bisectriz.

El ∡ APC = ∡APB entonces 90° = 90° y AP es perpendicular a CB.

Ejercicio 1.10.9 **En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes y dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.** (Si su suma es 180°)



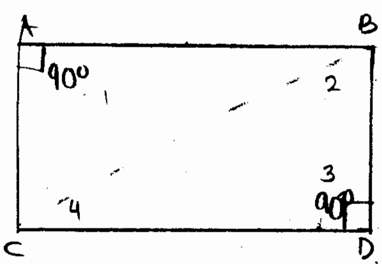
AC divide al paralelogramo en 2 triángulos congruentes. Además, AC es una transversal a las paralelas AD y BC por lo que los ∡ alternos internos son iguales (1 y 4) también (2 y 3).

Paralelogramo: Cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos

Por el criterio ALA donde AC es el lado común y ∡ADC = ∡ ABC y ∡ DAB = ∡ DCB entonces el ∡C = ∡A y el ∡D = ∡B. Como el paralelogramo forma parte de los polígonos entonces la suma de sus ∡ interiores es 360° donde ∡A + ∡B + ∡C + ∡D = 360°

$\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$ = ∡A = ∡B = ∡C = ∡C = 90°, lo que demuestra que son suplementarios. ∡A + ∡B = 180°

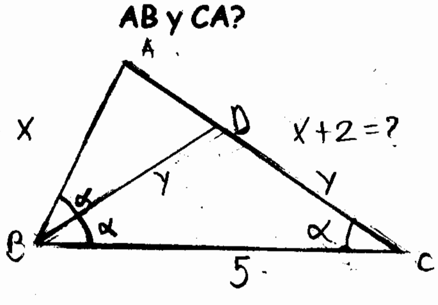
Ejercicio 1.10.10 **Si un paralelogramo, tiene un ángulo recto, entonces el paralelogramo es un rectángulo.**



Un rectángulo puede dividirse en 2 triángulos rectángulos por una diagonal. Un Δ rectángulo tiene un ángulo recto y como sabemos que BC divide al paralelogramo en 2 triángulos congruentes y es una transversal a las paralelas AC y BD entonces los ∡ alternos internos son iguales al igual que 2 y 4, también sabemos 1 y 3 son iguales al igual que 2 y 4, también sabemos que se cumple $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 90°$ y la suma de sus ∡ interiores es 360°.

El rectángulo ABCD se forma al trazar AC paralela a BD y AB paralela a CD donde ABC es congruente con BCD.

Ejercicio 1.10.11 **En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA?**



CA = x+2 BC=5
AB = x.

La bisectriz interna del ∡ ABC es la recta por B que divide al ángulo en 2 ángulos iguales. BCD es isósceles

Sabemos que los Δ ABD y DBC son semejantes porque tienen 2 ángulos iguales (α) ∡ ABD y ∡DBC, entonces

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC}$$

Por el teor. de semejanza A∠A "Dos Δ con un lado igual y 2 ∡ adyacentes iguales son congruentes"

Sustituyendo:

$$\frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5} = \frac{x}{x+2}$$

Continúa. 1.10.11

Sustituyendo $\frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5} = \frac{x}{x+2}$

$$\frac{x+2-y}{x} = \frac{x}{x+2}$$

$$(x+2-y)(x+2) = x^2$$
$$x^2 + 2x + 2x + 4 - xy - 2y = x^2$$
$$x^2 + 4x - 2y + 4 - xy = x^2$$
$$-x^2 - x^2 + 4x - 2y + 4 - xy = 0$$
$$4x - 2y + 4 - xy = 0$$

$$\frac{y}{5} = \frac{x}{x+2};$$
$$xy + 2y = 5x$$

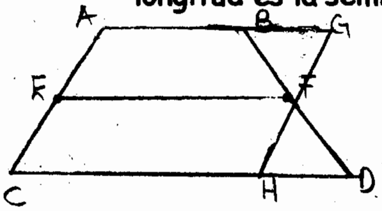
$$4x - 2y + 4 - xy + \overbrace{xy + 2y - 5x}^{} = 0$$
$$-x + 4 = 0$$
$$\boxed{x = 4}$$

Sustituyendo.

$$\frac{y}{5} = \frac{4}{4+2}$$

$$\frac{y}{5} = \frac{4}{6} \Rightarrow 6y = 20 \Rightarrow \boxed{y = \frac{20}{6} \text{ ó } \frac{10}{3}}$$

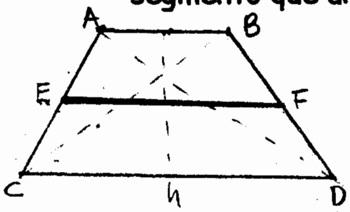
Ejercicio 1.10.12 **La recta media de un trapecio, es la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos y es paralelo de la bases del trapecio. Muestre que su longitud es la semisuma de la bases del trapecio.**



AC y BD son los lados no paralelos, EF es la recta que une los puntos medios de AC y BD y es paralela de las bases AB y CD

Para demostrar que EF es paralela a AB y CD trazamos por F una paralela a AC y prolongamos el segmento AB hasta que se intersecte con GH, BF, FD, BG, HD, GF y FH tienen la misma longitud y ∴ ∢ interiores iguales, entonces como GF = FH y AE = EC ∴ EF es punto medio del paralelogramo ACGH, esta base media es per se paralela a AG y CH, Tenemos que EF es paralela a CH. (Continúa sig. hoja)

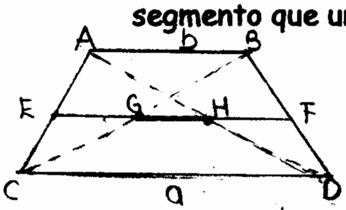
Ejercicio 1.10.13 **La recta media de un trapecio divide por la mitad a cualquier segmento que une los puntos de sus bases.**



Del ejercicio anterior, sabemos que AB y CD son paralelos los puntos medios de AC y BD dan lugar a EF que a su vez divide AC y BD en 2 segmentos de la misma longitud

Se observa claramente que que AB, EF y CD son paralelas y que hay 2 trapecios que tienen la misma base entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base igual. Por el 1er teorema de Tales sabemos que E y F son puntos de ABCD tales que EF es paralelo a AB y a CD. Entonces $\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$.

Ejercicio 1.10.14 **Las bases de un trapecio son a, b. Encuentre la longitud del segmento que une los puntos medios de la diagonales.**



Dibujamos el trapecio ABCD y trazamos la recta media EF las intersecciones con las diagonales AD y BC serán los puntos medios de las diagonales

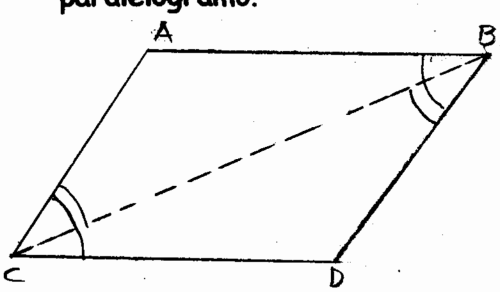
Entonces, EH es la recta media del Δ ADC por lo tanto $EH = \frac{a}{2}$ y EG es la recta media del Δ ACB ∴ $EG = \frac{b}{2}$

La recta que une puntos medios de los lados de un Δ es paralela al otro lado y de longitud la 1/2 de éste.

Es decir, $GH = EH - EG = \frac{a-b}{2}$

Ejercicio 1.10.15 **(i) Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. (ii) Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.**

i)



Dibujamos un cuadrilátero cuyos lados opuestos sean congruentes es decir, donde AC = BD y AB = CD

La diagonal BC del paralelogramo ABCD divide a éste en 2 triángulos congruentes.

Como BC es una transversal a los paralelos AB y CD se tiene que los ∢ alternos internos son iguales ∢ ACB = ∢ CBD y ∢ ABC = ∢ BCD. Finalmente, como BC es lado común de los triángulos ABC y BCD resulta por el criterio LLL, que estos triángulos son congruentes. y por lo tanto AB es paralelo a CD. Como ∢ ACB = ∢ CBD entonces AC y BD son paralelos, (Continúa...)

Continuación... Ejercicio 1.10.12

Para demostrar que la longitud EF = a la semisuma de las bases del trapecio tenemos que:

$$AG = AB + BG$$
$$CH = CD - HD$$

Del anterior cuál. sabemos que $AG = EF = CH$ entonces:

$$EF = AB + BG \qquad EF = CD - HD$$

$$EF - AB - BG + EF - CD + HD = 0$$
$$2EF = AB + BG + CD - HD$$
$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

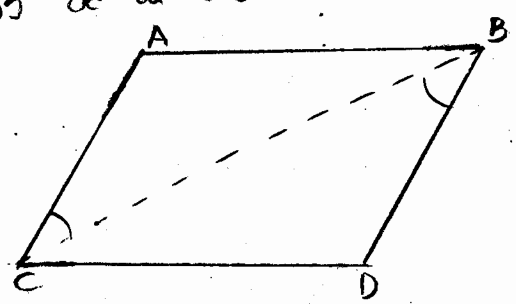
AB = Base menor
CD = Base mayor

Esto demuestra que la longitud de EF es igual a la semisuma de las dos bases del trapecio.

Continuación... Ejercicio 1.10.15

luego ABCD es un paralelogramo. Esto también se demuestra aplicando donde la suma de los ∡ interiores de $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 90°$ $\quad 90° \times 4 = 360°$ un cuadrilátero es 360°.

ii) Es lo mismo que i) pero expresado de manera distinta, tenemos dos lados de un cuadrilátero paralelos y congruentes



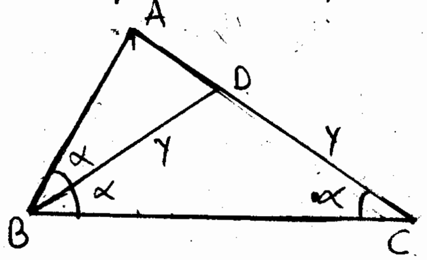
Donde AC es paralelo a BD y AC = BD
La diagonal corta a los paralelos AC y BD en 2 triángulos congruentes donde el

$$\measuredangle ACB = \measuredangle CBD$$

Por el criterio de congruencia LAL sabemos que si tenemos 2 triángulos que tienen 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, son congruentes.

Entonces, el Δ ABC y el Δ BDC son congruentes, luego AB y CD son iguales y paralelos. Esto mismo se explica con un poco más de detalle en el inciso i. Se concluye que efectivamente el cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejercicio 1.10.16 **Considere un triángulo ABC en el cual AC> AB. Una semirrecta con origen B corta a AC en D de tal forma que los ángulos ABD y ACB son iguales. Deduzca que $AB^2 = AC * AD$.**



Sabemos que $AC > BA$ porque AC es opuesto a $\measuredangle ABC$ que es $> \measuredangle ACB$

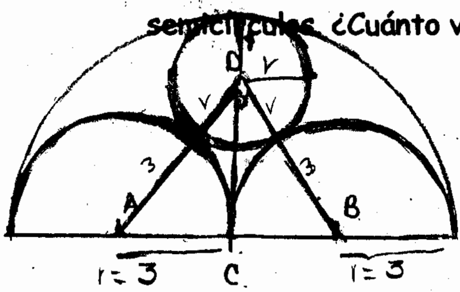
La bisectriz interna del $\measuredangle ABC$ es la recta por B que divide al ángulo en 2 $\measuredangle$ iguales. BCD es un triángulo isósceles. El $\measuredangle BAC$ es común

Entonces, los Δ ABD y DBC son semejantes porque tienen 2 $\measuredangle$ iguales (α) $\measuredangle ABD$ y $\measuredangle DBC$,

por lo tanto $\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC}$ por el teorema de semejanza ALA teremos que "Dos Δ con un lago igual y 2 $\measuredangle$ adyacentes iguales son congruentes"

Despejando la igualdad anterior tengo = $AB^2 = AD \cdot AC$ (Continua...)

Ejercicio 1.10.17 **Dos semicírculos de radio 3 están inscritos en un semicírculo de radio 6, como se muestra en la figura. Un círculo de radio r es tangente a los tres semicírculos. ¿Cuánto vale r?**



Donde A y B es el centro de los semicírculos de r=3 y C es el centro del semicírculo mayor

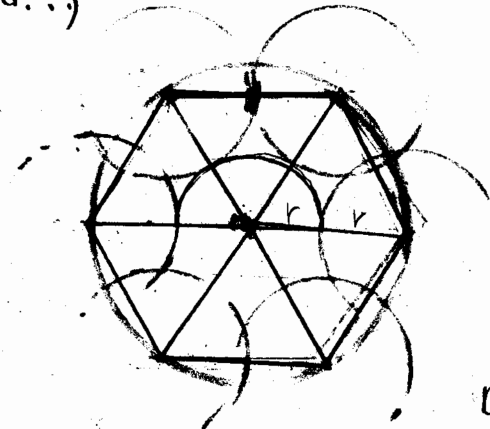
AC=3, CB=3, CD= 6-r (radio del semicírculo mayor - radio del semicírculo de radio r).

Podemos trazar un triángulo del centro de los semicírculos de r=3 al centro del semicírculo de radio r

Teremos AC=CB=3, AD=3+r =BD es un triángulo isósceles con 2 lados iguales, de donde el triángulo ADC y DCB son Δ rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras que dice que "En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa = a la suma de los cuadrados de los catetos luego $AC^2+CD^2=AD$

Ejercicio 1.10.18 **Sobre un mesa se encuentra una semiesfera (mitad de una esfera) de radio uno, con su parte plana apoyada en la mesa. En forma circular, rodeando la semiesfera, se colocan 6 esferas de radio r de tal forma que cada esfera toca la semiesfera, la mesa y las dos esferas adyacentes ¿Cuánto vale r?**

(Continua...)



Como observamos se forman 6 triángulos equiláteros de lado 2r

Sea. Q = donde la esfera toca la mesa
T = el punto de la tangencia con la semiesfera
E = centro de la esfera
C = centro de la semiesfera
O = centro del hexágono

Donde CQ= OE = 2r

Como QE = r, CE = 1+r y CQ=2r

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos

$$CE^2 = QE^2 + CQ^2 \Rightarrow (1+r)^2 = r^2 + (2r)^2 \Rightarrow 1+2r+r^2 = r^2+4r^2$$
$$4r^2-2r-1=0$$

Continuación. Ejercicio 1.10.17

Como $AC^2 + CD^2 = AD^2$ sustituyendo tengo.

$$3^2+(6-r)^2=(3+r)^2$$
$$3^2+(-r+6)^2=(r+3)^2$$
$$9+r^2-12r+36= r^2+6r+9$$
$$\cancel{9}+36-\cancel{9}-12r-6r=-r^2+r^2$$
$$36-18r=0$$
$$36=18r$$
$$\boxed{r=2}$$

Continua... Ejercicio 1.10.18

$$4r^2-2r-1=0$$

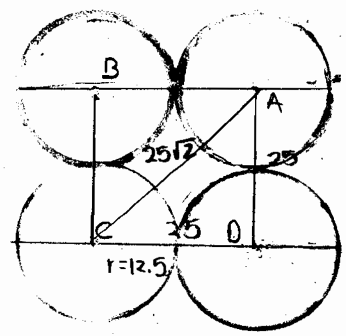
$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-2^2-4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}$$

$$r=\frac{2\pm\sqrt{20}}{8} = .808$$

Ejercicio 1.10.19 **Cuatro pelotas de basket-ball se colocan en el piso formando un cuadrado con las cuatro. Una quinta pelota se coloca sobre las otras cuatro de tal forma que toca a todas ellas. Si el diámetro de una pelota es 25, ¿a qué distancia del suelo, se encuentra al centro de la quinta pelota?**



Sabemos que el radio de cada esfera es 12.5 y el D=25
Trazamos la diagonal AC y se forma un triángulo rectángulo de tal forma que es la hipotenusa. Por el teorema de Pitágoras tengo $AC^2 = AD^2 + CD^2 = AC^2 = 25^2 + 25^2 \Rightarrow$

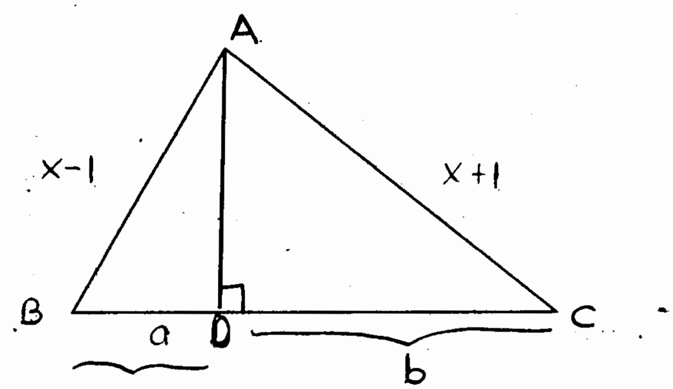
$$AC = \sqrt{25^2+25^2}$$

$$AC = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$$

1250	5
250	5
50	5
10	5
2	2
1	

$5^2\sqrt{2}$

Ejercicio 1.10.20 **En la siguiente figura, demostrar que b - a = 4**

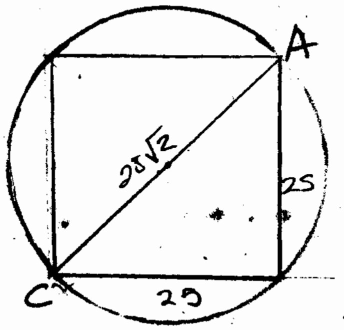


Sabemos que una primera aplicación del teorema de Pitágoras es la caracterización de las alturas de un ΔABC.
Entonces, si ABC es un triángulo y AD es perpendicular a BC, se tiene que
$AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$
Luego, ABD y ADC se tiene que. $AB^2 = AD^2 + DB^2$ y $AC^2 = AD^2 + DC^2$
Por lo tanto, $AB^2 - DB^2 = AD^2$ y $AC^2 - DC^2 = AD^2$
Que equivale a decir que. $AB^2 - DB^2 = AC^2 - DC^2$
Sustituyendo tengo:

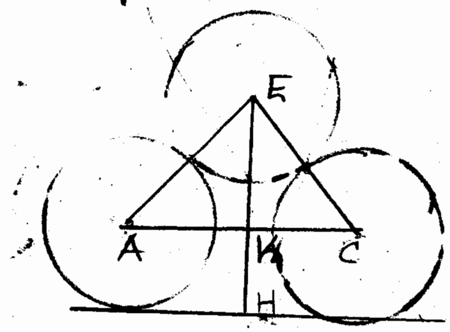
$$(x-1)^2 - a^2 = (x+1)^2 - b^2$$
$$x^2 - 2x + 1 - a^2 = x^2 + 2x + 1 - b^2$$
$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x - 2x + \cancel{1} - \cancel{1} = a^2 - b^2$$
$$-4x = a^2 - b^2$$
$$(-1)(-4x) = (-1)(a^2 - b^2)$$
$$4x = b^2 - a^2$$

(Continúa ...)

Continuación... Ejercicio 1.10.19



Ahora, para calcular la altura del centro de la quinta pelota



·Sabemos que de $AC = 25\sqrt{2}$, la altura del centro $E = EK + KH$

Haciendo uso del teorema de Pitágoras tenemos

$$EK = \sqrt{EA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{25}{2}\sqrt{2}$$

$$KH = \frac{25}{2} = 12.5$$

Por ende, la distancia del centro de la quinta pelota al suelo es

$\frac{25}{2}\sqrt{2} + 12.5 = 30.177$

Continuación ... Ejercicio 1. 10.20

Factorizando $4x = (b-a)(b+a)$

Como $a+b=x$.

$$4x = (b-a)(x)$$

$$4 = \frac{b-a\,(\cancel{x})}{\cancel{x}}$$

$$\boxed{4 = b-a}$$

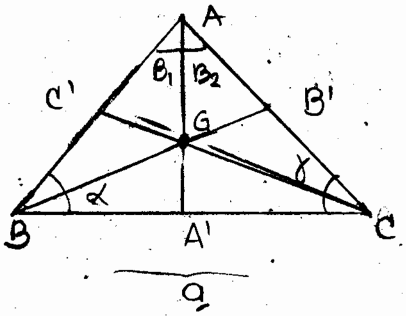
Por ser triángulos semejantes ABD y ABC se tiene que

$\frac{x-1}{x} = \frac{a}{x-1}$, luego

$$(x-1)^2 = ax$$

$$x^2 - 2x + 1 = ax$$

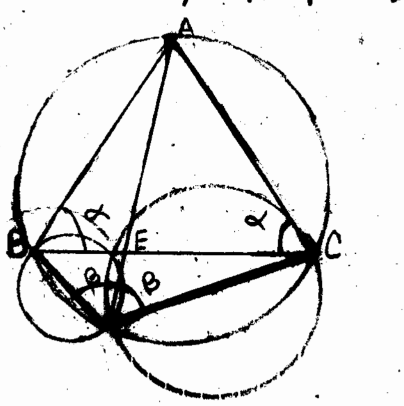
Ejercicio 1.10.21 **En un triángulo ABC la mediana m_a= AA' satisface $m_a > \frac{1}{2}$ a. Muestre que < BAC es agudo.**



Medianas: Son los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto.
En este caso A', B' y C' son los puntos medios de BC, AC y AB. Las medianas son AA', BB' y CC'
G= Gravicentro (Punto de concurrencia de las medianas.
Sabemos que $\beta_1 = \measuredangle BAA'$ y $\beta_2 = \measuredangle A'AC$, y que $M_a > \frac{1}{2}a$. o bien $AA' > \frac{1}{2}a$

Entonces, $\alpha > \beta_1 \wedge \gamma > \beta_2$, por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (La suma de los $\measuredangle$ interiores de un triángulo es 180°) es decir, $\alpha + \beta + \gamma > \beta + \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \beta + \beta$
$\alpha + \beta + \gamma > 2\beta$

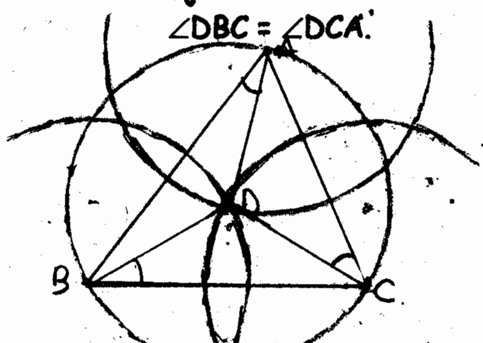
Ejercicio 1.10.22 **Sea ABC un triángulo isósceles con AB = AC. Una recta por A corta al semicírculo del triángulo y a la recta BC en los puntos E y D, respectivamente. Muestre que los semicírculos de los triángulos DCE y BDE son tangentes a los lados AC y AB, respectivamente.**



Sabemos que por definición un triángulo isósceles tiene 2 lados iguales y por lo tanto AB=AC, además el $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB$
Como se observa el segmento AC es tangente al circuncírculo de EDC $\Longleftrightarrow$ el $\measuredangle ACE = \beta = EDC$

Es necesario que se cumpla que $\alpha = \beta$ esto se demuestra por el Corolario 1.7.2 "Todos los ángulos inscritos que abren un mismo arco tienen la misma medida".
De la misma manera, el segmento AB es tangente al circuncírculo EBD $\Leftrightarrow$ el $\measuredangle ABE = \beta = \measuredangle EDB$.

Ejercicio 1.10.23 **Sea ABC un triángulo, encuentre un punto D tal que: ∠DAB = ∠DBC = ∠DCA.**



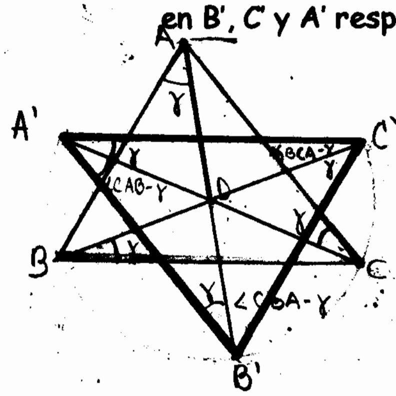
Sabemos por hipótesis que $\alpha = \measuredangle DAB = \measuredangle DBC = \measuredangle DCA$
Como son 3 ángulos que suman 180°
$\measuredangle DAB + \measuredangle DBC + \measuredangle DCA = 180°$

Entonces el $\measuredangle ADB = 180° - \alpha - (\measuredangle ABC - \alpha) = 180° - \measuredangle ABC$
dado que los 3 $\measuredangle$ son iguales, por lo tanto un lugar geométrico para el punto D es el conjunto de puntos que cumplen, $\measuredangle ADB = 180° - \measuredangle ABC$
Los otros 2 lugares geométricos para los puntos D es el conjunto de puntos que cumplen:

$\measuredangle BDC = 180° - \measuredangle BCA$
$\measuredangle CDA = 180° - \measuredangle CAB$

Solución: Es la intersección de los 3 arcos de circunferencia los cuales son concurrentes.

Ejercicio 1.10.24 Sean ABC un triángulo y D un punto tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle DCA$. Si AD, BD y CD se prolongan hasta intersecar el semicírculo del triángulo ABC en B', C' y A' respectivamente, muestre que ABC y A'B'C' son semejantes.



Sabemos que $\gamma = \measuredangle DAB = \measuredangle DCA = \measuredangle DBC = \measuredangle B'AB = \measuredangle C'BC = ACA'$.

Tenemos que $\measuredangle C'A'C = \gamma$ y $\measuredangle CA'B' = \measuredangle CAB - \gamma$ entonces $C'A'B' = CBA$

También se cumple que $\measuredangle AB'A' = \gamma$ y $\measuredangle C'B'A = CBA - \gamma$ asimismo $\measuredangle BC'B' = \gamma$ y que el $\measuredangle BC'A' = BCA - \gamma$

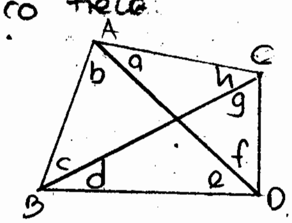
Ejercicio 1.10.25 Sea ABCD un cuadrilátero cíclico, una circunferencia C1 que pasa por A y D corta a la recta AB en E, y otra circunferencia C_2 que pasa por C y D corta la recta BC en F. Sea G el segundo punto de intersección de C_1 y C_2. Muestre que E, F y G son colineales.

(Figura en la sig. hoja)

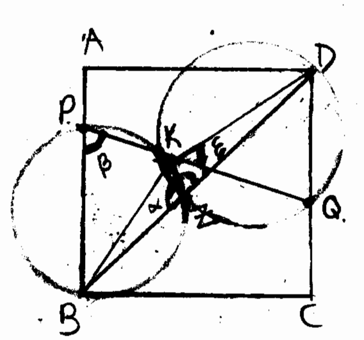
Por definición, sabemos que 3 puntos no alineados, pasa siempre una circunferencia.. Sin embargo, cuando 4 puntos (o más) se encuentran sobre una circunferencia decimos que son concíclicos (cíclicos).

Además, ABCD es un cuadrilátero convexo (ya que tiene sus diagonales dentro del cuadrilátero) y es cíclico si y sólo si tiene 2 ángulos opuestos suplementarios. Es decir, si el cuadrilátero es cíclico tiene

i) $\angle A + \angle C = 180°$
ii) $\angle B + \angle D = 180°$
iii) $a = d$
iv) $b = g$
v) $c = f$
vi) $e = h$



Ejercicio 1.10.26 Una recta que pasa por un punto K en el interior del cuadrado ABCD, interseca a los lados opuestos AB y CD en los puntos P y Q respectivamente. Se dibujan dos circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos KBP y KDQ, respectivamente. Pruebe que el segundo punto de intersección de las dos circunferencias está sobre la diagonal BD.



Se forma un cuadrilátero con vértices BZKP, éste es cíclico ya que los 4 puntos se encuentran sobre la circunferencia.

Sabemos por se que $\alpha = \measuredangle KZB$, $\beta = \measuredangle BPK$ y que $\alpha + \beta = 180°$

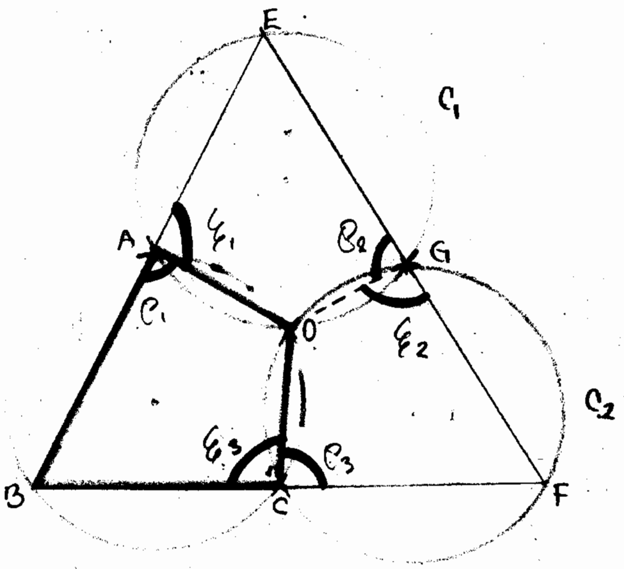
Análogamente, el cuadrilátero cíclico KZDQ tiene $\gamma = \measuredangle DZK$ y $\zeta = DKQ$ entonces

$$\gamma = \zeta$$

Como PQ es una transversal que corta a las transversales AB y DC tenemos que $\measuredangle BPK = \measuredangle DQK$.

(Continúa...)

Continuación del ejercicio 1.10.25.



Para demostrar que E, G y F son colineales hay que demostrar que los 3 puntos están sobre una recta.

Para ver que E, F y G son colineales observamos que $\rho_2 + \xi_2 = 180°$, es decir, son ángulos suplementarios.

Asimismo, se tiene que $\rho_1 + \xi_3 = \xi_1 + \rho_2 = \xi_2 + \rho_3 = \xi_3 + \rho_3 = \xi_1 + \rho_1 = 180°$

Es decir, $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ por lo tanto E, F, G son colineales si

$\xi_3 = \measuredangle BCD$ $\qquad$ $\rho_3 = \measuredangle DCF$

$\xi_1 = \measuredangle EAD$ $\qquad$ $\rho_1 = \measuredangle BAD$

$\xi_2 = \measuredangle FGD$ $\qquad$ $\rho_2 = \measuredangle OGE$

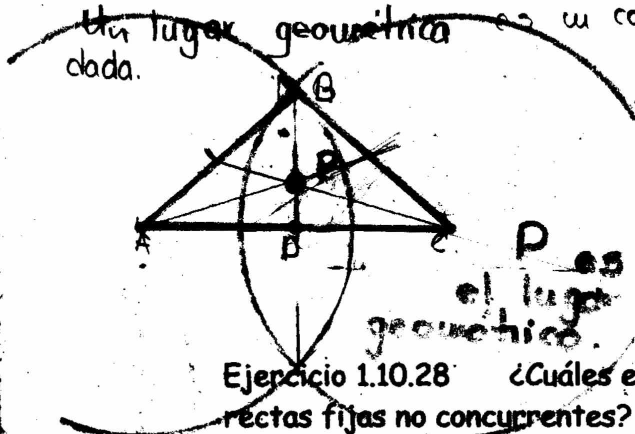
y lo anterior se cumple.

Continuación ... Ejercicio 1.10.26

De lo anterior, se concluye que, $\measuredangle KZB + \measuredangle DZK = 180°$ por ser ángulos suplementarios, por lo que D, Z y B son colineales, es decir, Z está sobre la recta BD.

Ejercicio 1.10.27 **¿Cuáles el lugar geométrico de los puntos que se equidistan a tres puntos fijos colineales?**

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen una condición dada.

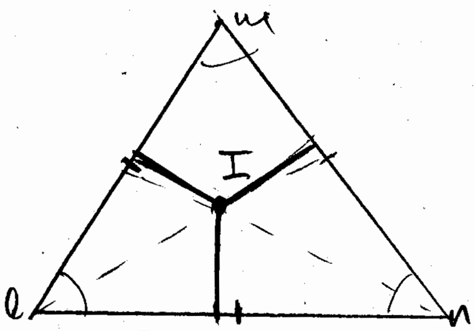


O = Circuncentro y sabemos que la mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio

Si B es el punto medio de AC y G se encuentra en la mediatriz entonces se pueden formar los 2 triángulos rectángulos AGB y BCG. Por el criterio LAL, estos son congruentes ya que AB = BC GB es común. (Continúa sig. hoja...)

Con cualquier radio = $r > 1/2$ BC

Ejercicio 1.10.28 **¿Cuáles el lugar geométrico de los puntos que se equidistan a tres rectas fijas no concurrentes?**

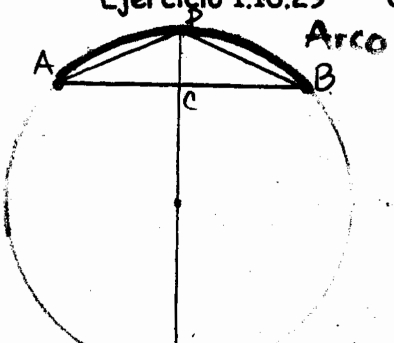


Sabemos que el punto de concurrencia de las bisectrices es I y es el incentro del triángulo ABC

Y que además, el lugar geométrico de los puntos que equidistan a 2 rectas es igual a las bisectrices de los ángulos que forman las rectas

Entonces, los puntos que equidistan a L y m son los puntos de la bisectriz interna y los de la bisectriz externa (de los ∡ M y ∡ l y de los ∡ M y ∡N también tienen un punto en común con la bisectriz interna del ∡ que forman n y l.

Ejercicio 1.10.29 **Utilizando únicamente regla y compás biseque un arco dado.**

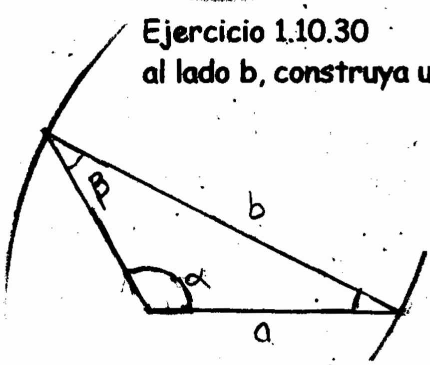


Tenemos el segmento AB y dibujamos la cuerda que une los 2 extremos del arco, trazamos la mediatriz de la cuerda (P) y se biseca el arco

Nótese que como la mediatriz es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio, está la divide en un triángulo isósceles ya que AC = AB

Asimismo, cabe recordar que la cuerda se define como "cualquier segmento de recta AB que tenga sus extremos sobre la circunferencia y no sea diámetro"

Ejercicio 1.10.30 **Dados dos lados a y b de un triángulo con a< b y el ángulo opuesto al lado b, construya un triángulo.**



Este triángulo es obtusángulo (porque tiene un ángulo obtuso y es escaleno porque no tiene ningún par de lados iguales.

Por definición sabemos que a<b porque el ángulo opuesto a b (α) es > que el ángulo opuesto a a (β) por ende

$$\alpha > \beta$$

Esto también se observa porque α es un ∡ obtuso que por definición es > 90° mientras que el β es un ∡ agudo menor a 90°. esto significa que b > a.

Continuación ... Ejercicio 1.10.27

El punto P se encuentra en la mediatriz del segmento AB., P cumple que PB = PA esto es, P esta en la mediatriz de AB.

El punto de concurrencia de las mediatrices Ia, Ib, Ic, que se denota por O, se conoce como el circuncentro del triángulo ABC.

En conclusión, el lugar geométrico de los puntos que equidistan a 3 puntos es la mediatriz del segmento que los une y las mediatrices AB, BC y CA tienen un sólo punto en común "el circuncentro P".