a) Encuentre el vector resultante:

$$\vec{PP_1} + \vec{PP_2} + \vec{PP_3} + \vec{PP_4} + \vec{PP_5}$$

$$\vec{PP_1} = P_1 - P = (-3,-2) - (-0.5,-1) = (-2.5,-1)$$
$$\vec{PP_2} = P_2 - P = (3,-2) - (-0.5,-1) = (4.5,-1)$$
$$\vec{PP_3} = P_3 - P = (2,2) - (-0.5,-1) = (2.5,3)$$
$$\vec{PP_4} = P_4 - P = (0,3) - (-0.5,-1) = (0.5,4)$$
$$\vec{PP_5} = P_5 - P = (-2,2) - (-0.5,-1) = (-1.5,3)$$

$$\Rightarrow \vec{PP_1} + \vec{PP_2} + \vec{PP_3} + \vec{PP_4} + \vec{PP_5} = (-2.5,-1) + (4.5,-1) + (2.5,3) + (0.5,4)$$
$$+ (-1.5,3)$$
$$= (3.5,8)$$

b) Sea $P = (x,y)$, tal que $\vec{PP_1} + \vec{PP_2} + \vec{PP_3} + \vec{PP_4} + \vec{PP_5} = (0,0)$

$$\vec{PP_1} = (-3,-2) - (x,y) = (-3-x,-2-y)$$
$$\vec{PP_2} = (3,-2) - (x,y) = (3-x,-2-y)$$
$$\vec{PP_3} = (2,2) - (x,y) = (2-x,2-y)$$
$$\vec{PP_4} = (0,3) - (x,y) = (-x,3-y)$$
$$\vec{PP_5} = (-2,2) - (x,y) = (-2-x,2-y)$$

es decir,

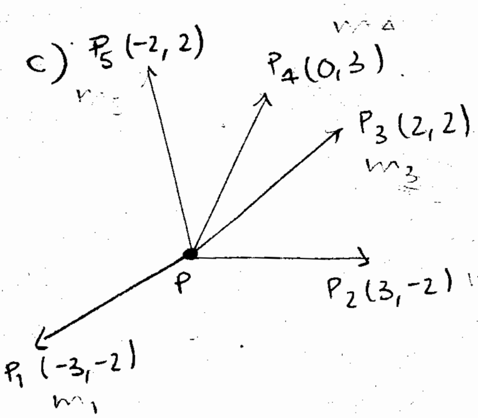
$$(-3-x,-2-y) + (3-x,-2-y) + (2-x,2-y) + (-x,3-y) + (-2-x,2-y) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -\cancel{3} - x + \cancel{3} - x + \cancel{2} - x - x - \cancel{2} - x = 0$$
$$-\cancel{2} - y - \cancel{2} - y + \cancel{2} - y + 3 - y + \cancel{2} - y = 0$$

$$\Rightarrow -5x = 0 \qquad 3 - 5y = 0$$
$$x = 0 \qquad y = 3/5$$

$$\therefore \boxed{P(0, 3/5)}$$

c)



Sea $P(x,y)$ tal que $m_1\vec{PP_1} + m_2\vec{PP_2} + m_3\vec{PP_3} + m_4\vec{PP_4} + m_5\vec{PP_5} = 0$

$$\Rightarrow m_1(-3-x,-2-y) + m_2(3-x,-2-y) + m_3(2-x,2-y) + m_5(-2-x,2-y) = \vec{0}$$
$$+ m_4(-x,-3-y)$$

esto es,

$$m_1(-3-x) + m_2(3-x) + m_3(2-x) + m_4(-x) + m_5(-2-x) = 0$$
$$m_1(-2-y) + m_2(-2-y) + m_3(2-y) + m_4(-3-y) +$$
$$m_5(2-y) = 0$$

$$-3m_1 - xm_1 + 3m_2 - xm_2 + 2m_3 - xm_3 - xm_4 - 2m_5 - xm_5 = 0$$

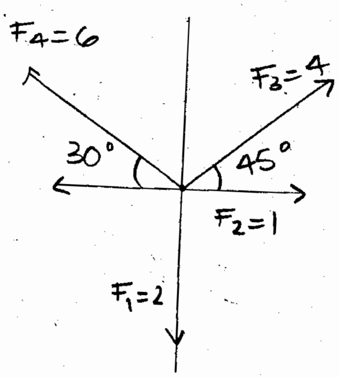
$$x = \frac{3m_1 - 3m_2 - 2m_3 + 2m_5}{-m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5}$$

$$-2m_1 - m_1 y - 2m_2 - ym_2 + 2m_3 - ym_3 - 3m_4 - ym_4 + 2m_5 - ym_5 = 0$$

$$y = \frac{2m_1 + 2m_2 - 2m_3 + 3m_4 - 2m_5}{-m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5}$$

$$\therefore \; P\left(\frac{3m_1 - 3m_2 - 2m_3 + 2m_5}{-m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5}, \frac{2m_1 + 2m_2 - 2m_3 + 3m_4 - 2m_5}{-m_1 - m_2 - m_3 - m_4 - m_5}\right)$$

2) Encuentre la fuerza resultante:



$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$$

se observa que

$$\vec{F} = (F_x, F_y)$$

con $F_x = F_{x_1} + F_{x_2} + F_{x_3} + F_{x_4}$

$F_y = F_{y_1} + F_{y_2} + F_{y_3} + F_{y_4}$

- $F_{x_1} = 0$; $F_{y_1} = -2$
- $F_{x_2} = 1$; $F_{y_2} = 0$
- $F_{x_3} = 4\cos 45° = \frac{4}{\sqrt{2}}$; $F_{y_3} = 4 \operatorname{sen} 45° = \frac{4}{\sqrt{2}}$
- $F_{x_4} = 6\cos 150 = -3\sqrt{3}$; $F_{y_4} = 6 \operatorname{sen} 150 = 3$

$$\Rightarrow F_x = 1 + \frac{4}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{3} \; ; \; F_y = 1 + \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F} = \left(1 + \frac{4}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{3}, \; 1 + \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$

3) encuentre el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{V_1} = (1, 2, 3)$ y $\vec{V_2}$ $(1, 3, 2)$.

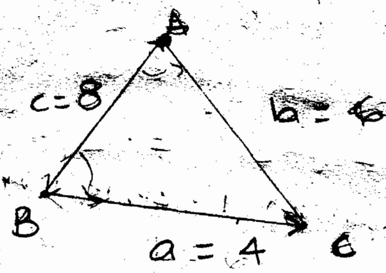
$$\text{Area}(V_1, V_2) = |V_1 \times V_2|$$

$$V_1 \times V_2 = \begin{pmatrix} 4-9 \\ 3-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|V_1 \times V_2| = \sqrt{25 + 2} = \sqrt{27}$$

$$\boxed{\text{Area}(V_1, V_2) = \sqrt{27}}$$

4. Encuentre el Δ ABC cuyos lados son $a = 4$, $b = 6$ y $c = 8$.



considerando a A el origen y los vectores $\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} = x$ y $\frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|} = y$ como base, se tiene que:

$\overrightarrow{AB} = 8x + 0y$; $\overrightarrow{AC} = 0x + 6y$

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -(8x + 0y) + (0x + 6y) = -8x + 6y$

en este sistema de referencia:

$\overrightarrow{AB} = (8, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0, 6)$; $\overrightarrow{BC} = (-8, 6)$

5. Demuestre que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y sólo si $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

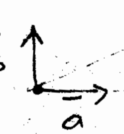
$\Rightarrow$) como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales $\Rightarrow a \cdot b = 0$,
$\Rightarrow$ por la ley de los cosenos $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$
y $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2$

$\therefore |a+b|^2 = |a-b|^2 \Rightarrow |a+b| = |a-b|$

$\Leftarrow$) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$
$\Rightarrow$ por la ley de los cosenos $|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b$
$= |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$, la única posibilidad para que se satisfaga lo anterior es que $2a \cdot b = 0$ y como $2 \neq 0$, $a \cdot b = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

6) Indique la idea general de cómo construir dos vectores en términos de otro dos ortonormales.

Sea $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores ortonormales

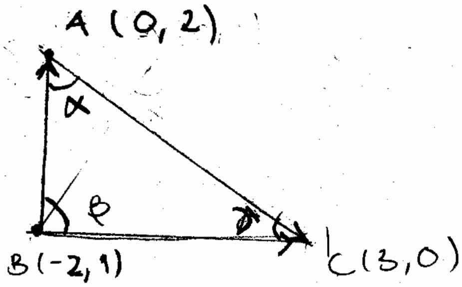


el primer vector puede ser algún colineal a $\bar{a}$, es decir $\vec{x} = \alpha \vec{a}$

y el segundo vector está dado por la diferencia de $\vec{x}$ y algún otro colineal a $\vec{b}$, es decir

$\vec{y} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

7. Dado el Δ descrito por los puntos $A(0,2)$, $B(-2,-1)$, $C(3,0)$ encuentre α, β, γ.



• α = ángulo $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$

$\vec{AB} = (-2,1) - (0,2) = (-2,-1)$

$\vec{AC} = (3,0) - (0,2) = (3,-2)$

$AB \cdot AC = -6 + 2 = 4$

$\cos\alpha = \dfrac{AB \cdot AC}{|AB||AC|} = \dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}$

$\alpha = 60.2551$

• β = ángulo $\vec{BA}$ y $\vec{BC}$

$\vec{BA} = (0,2) - (-2,1) = (2,1)$

$\vec{BC} = (3,0) - (-2,1) = (5,-1)$

$BA \cdot BC = 10 - 1 = 9$

$\Rightarrow \cos\beta = \dfrac{BA \cdot BC}{|BA||BC|} = \dfrac{9}{\sqrt{5}\sqrt{26}}$

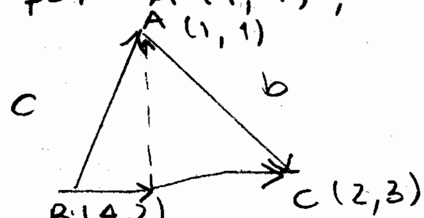
$\beta = 37.8749$

luego

$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$

$\gamma = 81.8699$

8. Usando vectores encuentre el área del Δ descrito por $A(1,1)$, $B(4,2)$ y $C(2,3)$



el Δ se forma por los vectores

$\bar{c} = \vec{BA} = (4,2) - (1,1) = (3,1)$

$\bar{b} = \vec{AC} = -(1,1) + (2,3) = (1,2)$

$\bar{a} = \vec{BC} = (2,3) - (4,2) = (-2,1)$

Tomando a BC como base

$\Rightarrow$ Area $= \dfrac{|\vec{a}| \cdot |Ca^{\perp}|}{2}$, con $Ca = \alpha a$

con $Ca^{\perp} = c - Ca$, además

$c = ca + ca^{\perp}$

$Ca^{\perp} \cdot Ca = 0$

$(c - \alpha a) \cdot \alpha a = 0$

$((3,1) - \alpha(-2,1)) \cdot (\alpha(-2,1)) = 0$

$(3+2\alpha, 1-\alpha) \cdot (-2\alpha, \alpha) = 0$

$(3+2\alpha)(-2\alpha) + (1-\alpha)\alpha = 0$

$-6\alpha - 4\alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = 0$

$-5\alpha^2 - 5\alpha = 0$

$-5\alpha(\alpha + 1) = 0$

$$\alpha = -1$$

$$\Rightarrow \; C_a^{\perp} = C - C_a$$
$$= (3,1) - (-1)(-2,1)$$
$$= (3,1) - (2,-1)$$
$$= (1,2)$$

Área Δ

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$$

9. Encuentre los valores de α y β con los cuales los vectores $\bar{a} = (3-1,\alpha)$ y $\bar{b} = (2,\beta,1)$ son $\perp$ entre si y $|\vec{a}| = 4$

$$|a| = \sqrt{9+1+\alpha^2} = 4$$
$$\alpha^2 = 16-10$$
$$\alpha^2 = 6$$
$$\alpha = \pm\sqrt{6}$$

Tomando $\alpha = \sqrt{6}$

$$a \cdot b = (3,-1,\sqrt{6}) \cdot (2,\beta,1) = 0$$
$$6 - \beta + \sqrt{6} = 0$$
$$-\beta = -6-\sqrt{6}$$
$$\beta = 6+\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \; \bar{a} = (3,-1,\sqrt{6}) \;\; y \;\; \bar{b} = (2, 6+\sqrt{6}, 1)$$

10. Encuentre el volumen del paralelepipedo que conforman los vectores $\bar{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,3,4)$ y $\bar{c} = (2,5,2)$

el volumen esta dado por el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 6-20 - 2(-2-8) + 3(-5-6)$$

$$= |-27|$$