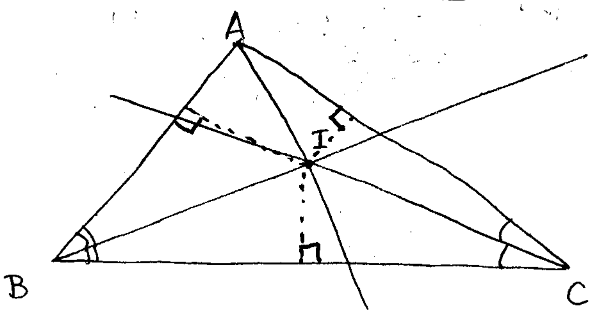
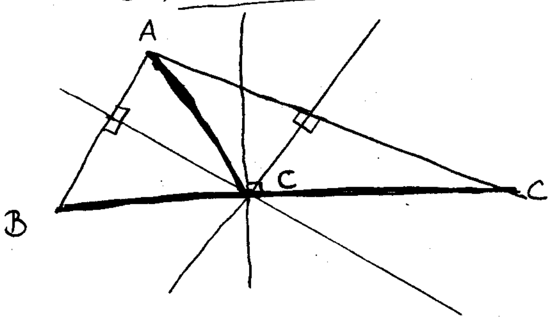
④ (a) Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.



DEM Sea ABC un triángulo. Trazamos la bisectriz en B y en C. El punto I (intersección de las 2 bisectrices trazadas) equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ por ser parte de la bisectriz en B. Así también equidista de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ por ser bisectriz del ángulo que se forma en el vértice C. Por definición de bisectriz podemos decir que I pertenece a la bisectriz del ángulo en el vértice A pues dicho punto equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

∴ Las bisectrices del triángulo ABC concurren en I ■

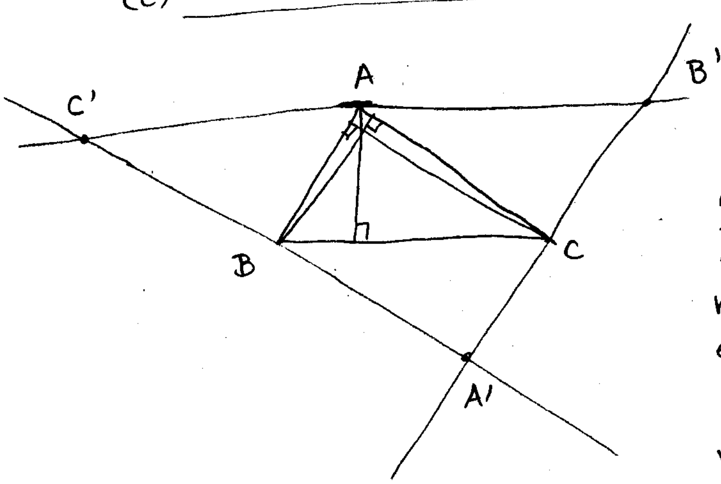
(b) Las mediatrices de un triángulo son concurrentes.



Dem. Sea ABC un triángulo. Trazamos la mediatriz de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$. Dichas mediatrices se intersectan en el punto c. Por definición de mediatriz podemos afirmar que c equidista de los vértices B y C por ser mediatriz de $\overline{BC}$, así también podemos decir que equidista de A y B por ser mediatriz de $\overline{AB}$. Luego por definición de mediatriz podemos decir que c pertenece a la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ pues dicho punto equidista de A y C.

∴ Las mediatrices de un triángulo ABC concurren en c. ■

(c) Las alturas de un triángulo son concurrentes.



Trazamos paralelas a $\overline{AB}$ en C, a $\overline{AC}$ en B y a $\overline{BC}$ en A.

Las intersecciones generan 3 triángulos congruentes con Δ ABC. Así $\overline{BC} = \overline{C'A} = \overline{AB'}$ lo que convierte a A en punto medio de C'B' y a la altura de A en mediatriz de $\overline{B'C'}$. Análogamente podemos proceder con los puntos C y B y sus alturas.

Dado que las mediatrices de cualquier triángulo son concurrentes y en particular las del $\Delta A'B'C'$ podemos afirmar que las alturas del ΔABC concurren pues son mediatrices del $\Delta A'B'C'$

$\therefore$ Las alturas del ΔABC concurren $\blacksquare$

(2) $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{x^2-4}$

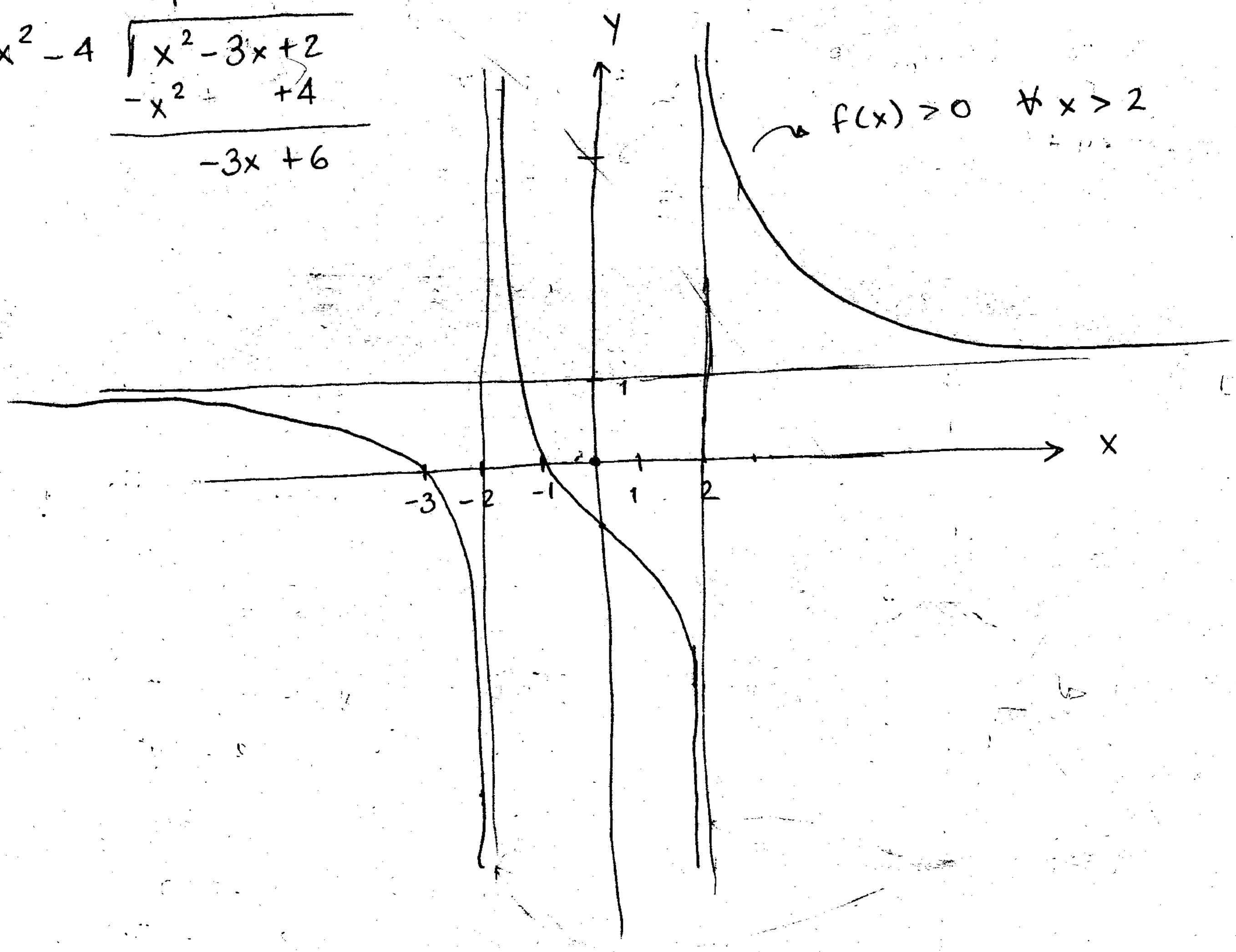
Raíces : $x=-1$, $x=-3$

Polos : $x = \pm 2$

Asíntotas : $y=1$

$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;1 \\
x^2-4 & \;x^2-3x+2 \\
 & -x^2 \qquad +4 \\
\hline
 & \qquad -3x+6
\end{array}
$$

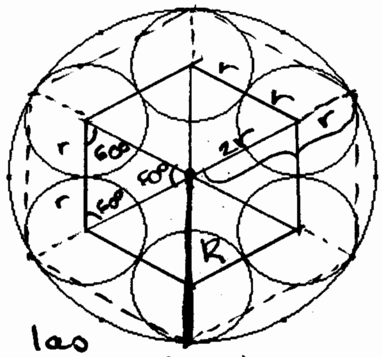


c) alturas

son concurrentes.

5. Encuentre la relación que guardan los radios de la siguiente figura:

$360° / 6 = 60°$



$r = 1$

$R = 2r + r$

$R = 3$

1) Unimos los radios (r) de los círculos pequeños entre sí con el círculo contiguo. Observamos que se forma un hexágono, por simetría.

2) Trazamos líneas que unan el centro de los círculos pequeños con el círculo mayor y formamos triángulos. Sabemos que son triángulos equiláteros porque dividimos la circunferencia de 360° en 6 partes iguales que nos dan 60°. Además sabemos que el lado opuesto a cada uno de esos ángulos mide 2r por la 1ra construcción.

3) Si ya sabemos que son triángulos equiláteros y que uno de sus lados mide 2r, la segunda construcción hecha donde unimos los centros también mide 2r.

4) Finalmente observamos que el radio R del círculo mayor está formado por el lado de uno de los triángulos y otro segmento de tamaño r. Es decir por 2r + r.

Podemos concluir que la relación que guardan los radios de esa figura es:

$R = 3r$ ó $r = \frac{R}{3}$

muy buen argumento

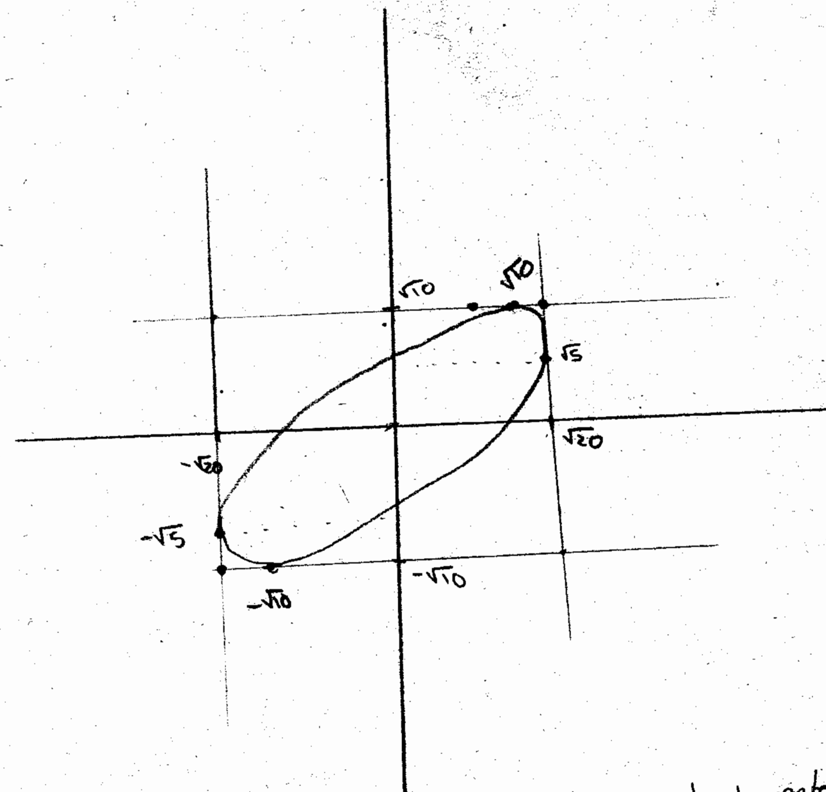
Nota: Argumente adecuadamente su respuesta, no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justifiación.

Fdo. Fdz.

$x^2 - 2xy + 2y^2 = 10$

$x^2 - 2xy + 2y^2 - 10 = 0$ $\quad a = 2$, $b = -2x$, $c = x^2 - 10$

Dom: $y = \dfrac{+2x \pm \sqrt{4x^2 - 8(x^2-10)}}{4}$



$4x^2 - 8x^2 + 80 \geq 0$

$-4x^2 + 80 \geq 0$

$-x^2 + 20 \geq 0$

$x^2 - 20 \leq 0$

$x^2 \leq 20$

$x \leq \sqrt{20}$

Rgo:
$x = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4(2y^2-10)}}{2}$ $\quad a = 1$, $b = -2y$, $c = 2y^2 - 10$

$x = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 8y^2 + 40}}{2}$

$4y^2 - 8y^2 + 40 \geq 0$

$-4y^2 + 40 \geq 0$

$-y^2 + 10 \geq 0$

$y^2 - 10 \leq 0$

$y^2 \leq 10$

$y \leq \sqrt{10}$

ok

Al ser una función implícita, no se puede despejar directamente
para tratar de
por lo que hay que hacer uso de la "chicharronera"? nos concentramos
obtener un despejo. Observamos que llegamos a una raíz y
en ella debido a que ésta es la que nos va a restringir los valores. Usamos
ésta técnica para las dos incógnitas y obtenemos, debido a los signos, nuestros
valores máximos, por lo que se nos restringe a un plano muy pequeño. Usando,
éstos valores en la función original, observamos hasta qué valor vamos a
obtener realmente de una incógnita utilizando el max. de la incógnita contraria.
Así obtendríamos cuatro puntos en nuestro cuadro que nos determinan la gráfica.

$x \in \sqrt{20}$

$(\sqrt{20})^2 - 2\sqrt{20}(y) + 2y^2 = 10$

$20 - 2\sqrt{20}y + 2y^2 = 10$

$10 - \sqrt{20}y + y^2 = 5$

$y^2 - \sqrt{20}y + 5 = 0$ $\quad a = 1$, $b = -\sqrt{20}$, $c = 5$

$y = \dfrac{\sqrt{20} \pm \sqrt{20 - 20}}{2}$

$y = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$x \in -\sqrt{20}$

$(-\sqrt{20})^2 + 2\sqrt{20}y + 2y^2 = 10$

$2\sqrt{20}y + 2y^2 + 10 = 0$

$y^2 + \sqrt{20}y + 5 = 0$ $\quad a = 1$, $b = \sqrt{20}$, $c = 5$

$y = \dfrac{-\sqrt{20} \pm \sqrt{20 - 20}}{2}$

$y = -\sqrt{5}$

$y \in \sqrt{10}$

$x^2 - 2x\sqrt{10} + 2(\sqrt{10})^2 = 10$

$x^2 - 2\sqrt{10}x + 20 = 10$

$x^2 - 2\sqrt{10}x + 10 = 0$ $\quad a = 1$, $b = -2\sqrt{10}$, $c = 10$

$x = \dfrac{2\sqrt{10} \pm \sqrt{40 - 40}}{2}$

$y \in -\sqrt{10}$

$x^2 + 2x\sqrt{10} + 2(-\sqrt{10})^2 = 10$

$x^2 + 2\sqrt{10}x + 20 = 10$

$x^2 + 2\sqrt{10}x + 10 = 0$ $\quad a = 1$, $b = +2\sqrt{10}$, $c = 10$

$x = \dfrac{-2\sqrt{10} \pm \sqrt{40 - 40}}{2}$

$x = -\sqrt{10}$

*** Debes observar que es una gráfica acotada!**

$\boxed{\text{OK}}$