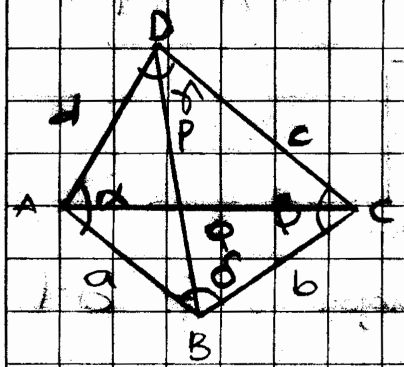
Vélez Mellado Patricia 6/oct/04
Geometría Analítica: Tarea



Sea ABCD un cuadrilátero con $\alpha + \beta = 180°$.
Dado lo anterior:

$$\alpha = 180° - \beta$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta$$

⇒ Considerando los triángulos ABD y BCD, se tiene por la ley de los cosenos que:

- $\cos\alpha = \dfrac{a^2+d^2-p^2}{2ad}$

y

- $\cos\beta = \dfrac{b^2+c^2-p^2}{2bc}$

por lo que:

$$\frac{a^2+d^2-p^2}{2ad} = -\frac{b^2+c^2-p^2}{2bc}$$

1) obtener la expresión gral. para la diagonal p:

$$\frac{a^2+d^2-p^2}{2ad} = \frac{-b^2-c^2+p^2}{2bc}$$

$$\frac{a^2}{2ad} + \frac{d^2}{2ad} - \frac{p^2}{2ad} = \frac{-b^2}{2bc} - \frac{c^2}{2bc} + \frac{p^2}{2bc}$$

$$\frac{a}{2d} + \frac{d}{2a} + \frac{b}{2c} + \frac{c}{2b} = \frac{p^2}{2bc} + \frac{p^2}{2ad}$$

$$\frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{2abcd} = \frac{p^2ad + p^2bc}{2abcd}$$

$$a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad = p^2(ad+bc)$$

$$\frac{bc(a^2+d^2) + ad(b^2+c^2)}{ad+bc} = p^2$$

Como la expresión anterior es siempre mayor que cero, es posible:

$$\boxed{|p| = \sqrt{\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}}}$$

que es la expresión para la diagonal P del cuadrilátero ABCD.

2) Expresión igual para la diagonal Q.
Como los ángulos opuestos de ABCD son suplementarios, $\gamma + \delta = 180°$

$$\cos\gamma = -\cos\delta$$

Considerando los Δ's DAC y ABC, se tiene que por la ley de los cosenos:

$$\cos\gamma = \frac{c^2+d^2-q^2}{2cd}\ ;\quad \cos\delta = \frac{a^2+b^2-q^2}{2ab}$$

por lo que:

$$\frac{c^2+d^2-q^2}{2cd} = -\frac{a^2+b^2-q^2}{2ab}$$

$$\frac{c^2}{2cd}+\frac{d^2}{2cd}-\frac{q^2}{2cd} = -\frac{a^2}{2ab}-\frac{b^2}{2ab}+\frac{q^2}{2ab}$$

$$\frac{c}{2d}+\frac{d}{2c}+\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a} = \frac{q^2}{2ab}+\frac{q^2}{2cd}$$

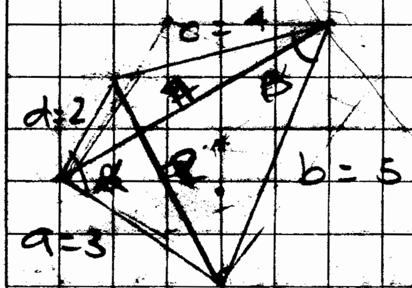
$$\frac{abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd}{2abcd} = \frac{q^2cd+q^2ab}{2abcd}$$

$$\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{cd+ab} = q^2$$

como la expresión es positiva

$$\boxed{|q| = \sqrt{\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+dc}}}$$

3) considerar el caso particular de ABCD con $a=3$, $b=5$, $c=4$, $d=2$.



$\alpha + \beta = 180°$

→ obtener la longitud de las diagonales p y q.

Como los ángulos opuestos son suplementarios es posible aplicar:

$$p = \sqrt{\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}}$$

$$p = \sqrt{\frac{20(9+4)+6(25+16)}{6+20}} = \sqrt{\frac{260+246}{26}} = \sqrt{\frac{506}{26}} = \sqrt{\frac{253}{13}}$$

$p \approx 4.41$

luego para obtener q:

$$q = \sqrt{\frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+dc}}$$

$$q = \sqrt{\frac{15(16+4)+8(9+25)}{15+8}} = \sqrt{\frac{572}{23}}$$

$q \approx 4.987$

observemos que:

$$\sqrt{\frac{253}{13}} \cdot \sqrt{\frac{572}{23}} = 22 = (2\cdot 5)+(3\cdot 5)$$

esto es:

$$p\cdot q = (a\cdot c)+(b\cdot d)$$

→ y como $\alpha+\beta = 180°$, es decir, los ángulos opuestos de ABCD son suplementarios, se concluye que el cuadrilatero es cíclico.

→ Por otro lado:

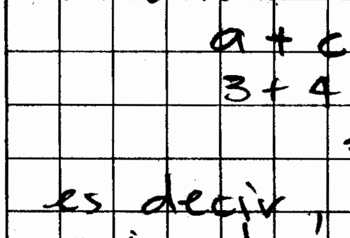
$$a + c = b + d$$
$$3 + 4 = 5 + 2$$
$$7 = 7$$

es decir, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otro dos.
Por lo que en el cuadrilatero ABCD hay una circunferencia tangente a a, b, c y d.

→ De lo anterior: tenemos que el cuadrilatero ABCD es bicentrico.

→ Como ABCD es bicentrico:

* radio circulo inscrito



cada cuadrilatero formado por los radios y las longitudes w, x, y, z son bicentricos, (la suma de los lados opuestos es igual y los ángulos opuestos son suplementarios)

$\Rightarrow A(ABCD) = \sqrt{x^2r^2} + \sqrt{z^2r^2} + \sqrt{y^2r^2} + \sqrt{w^2r^2}$

$\leadsto$ el área de ABCD es

$\sqrt{abcd} = \sqrt{(3)(5)(4)(2)} = \sqrt{120}$

$\sqrt{120} = xr + zr + yr + wr$

$\sqrt{120} = r(x+y+z+w)$

pero $s = x+y+z+w$,

$s = (3+5+4+2)/2 = 7$

$\sqrt{120} = sr$ $\qquad r \approx 1.5649$

$\sqrt{120} = 7r$

$\frac{\sqrt{120}}{7} = r$

$\leadsto$ Radio de círculo circunscrito:

$A^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{16R^2}$

$R = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{16A^2}}$

$R = \sqrt{\frac{(22)(6+20)(15+8)}{(16)(20)}} = \sqrt{\frac{13156}{1920}} = \sqrt{\frac{3289}{480}}$

$R \approx 2.6176$