Sánchez Sierra, Angel Gabriel.

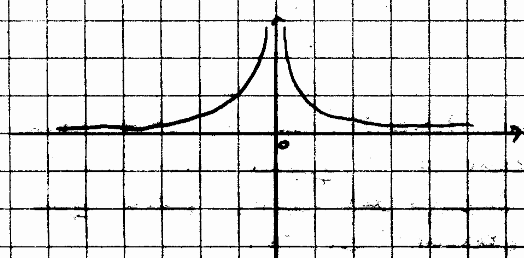
Calcula las formas posibles que puede tener la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

si $a > 0$; $b = c = 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{ax^2}$

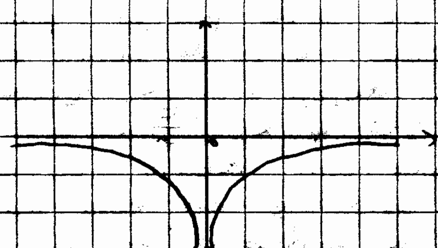
es una función de polo par, así que todo el tiempo esta en el mismo lado además tiene asintotas en $x=0$ y $y=0$



si $a < 0$; $b = c = 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{-ax^2}$

es una función de polo par
como es negativo, todos los resultados son negativos
tiene asintotas en $x=0$ y $y=0$



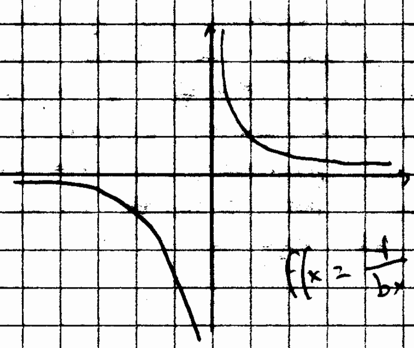
si $b > 0$; $a = c = 0$

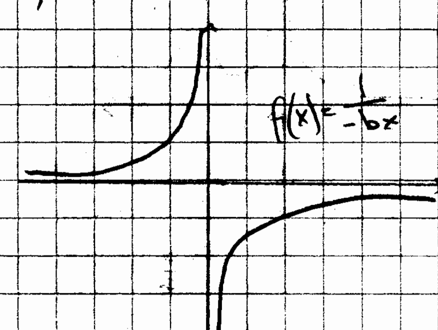
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{bx}$

si $b < 0$; $a = c = 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{-bx}$

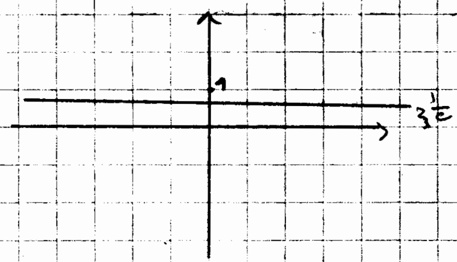
las dos funciones son de polos impares
las dos funciones son iguales; solo que como la primera es positiva y la segunda es negativa, entonces son al revés





si $c>0$; $a=b=0$

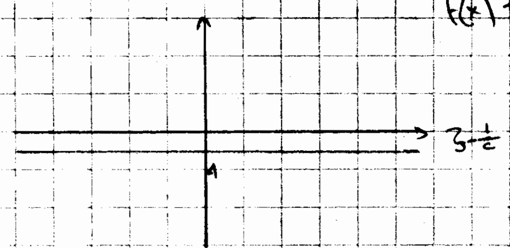
$f(x)=\frac{1}{c}$



es una línea recta. y como se está dividiendo entre cualquier número y ese número es constante queda como una línea además $f(x)$ no puede ser mayor de 1 porque se está dividiendo entre $\frac{1}{c}$

si $c<0$; $a=b=0$

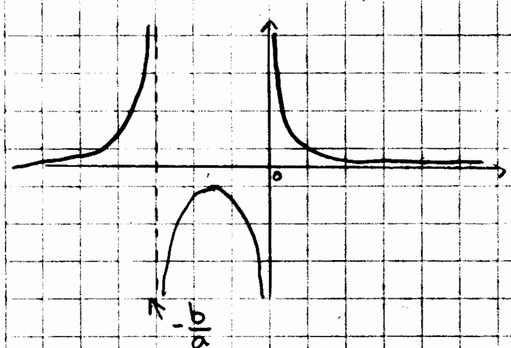
$f(x)=\frac{1}{-c}$



como se está dividiendo el 1 entre una constante negativa, queda una línea recta por debajo del cero, pero que no puede rebasar el -1.

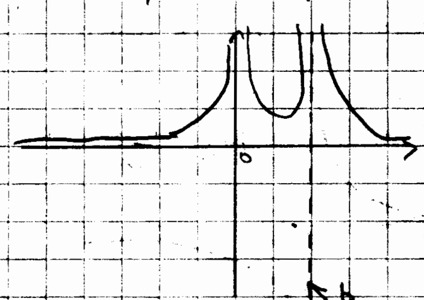
si $a>0$; $b>0$; $c=0$

$\Rightarrow \frac{1}{ax^2+bx}=f(x)=\frac{1}{x(ax+b)}$



se ve que es de polo par, por lo que los extremos vienen del mismo sentido. si se despeja una x quedan $x_1=0$ y $x_2=-\frac{b}{a}$
y como están debajo, se crean unas asíntotas en esos puntos. como es positiva y par, los extremos son positivos.
como arriba no hay 0s, nunca cruza el eje x y en valores entre $-\frac{b}{a}$ y 0 es negativo, ahí los valores son negativos.

si $a>0$; $b<0$; $c=0$



es polo par, y el término más grande es positivo, va a quedar del lado positivo. hay asíntotas en $x=\frac{b}{a}$ y $x=0$. si se toma un valor entre 0 y $\frac{b}{a}$ dan números positivos y no hay ceros arriba, por lo tanto no se traspasa el eje x

$f(x)=\frac{1}{ax^2-bx}=\frac{1}{x(ax-b)}$

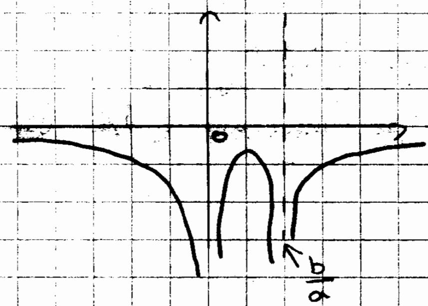
$x_1=\frac{b}{a}$

$x_2=0$

si $a<0$; $b>0$; $c=0$

$x_1=0$
$x_2=\frac{b}{+a}$

$f(x)=\frac{1}{-ax^2+bx}=\frac{1}{-x(ax-b)}$

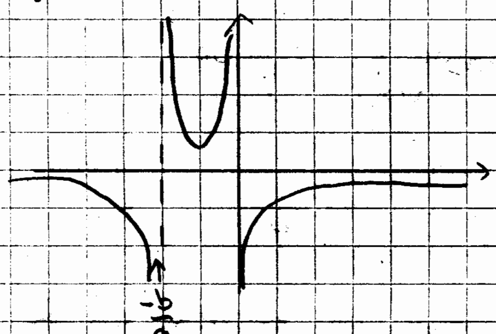


como es polo par, los extremos son del mismo signo.
en 0 y en $\frac{b}{a}$ hay asintotas.
si se toma un valor menor que 0 da negativo
si se toma un valor entre el 0 y $\frac{b}{a}$ también da negativo.

si $a<0$; $b<0$; $c=0$

$f(x)=\frac{1}{-ax^2-bx}=\frac{1}{-x(ax+b)}$

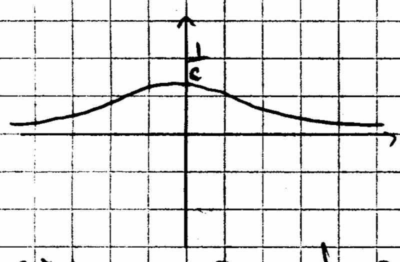
$x_1=0$
$x_2=\frac{-b}{a}$



como es polo par, los extremos son del mismo signo.
en 0 y en $-b/a$ hay asintotas.
si se toma un valor entre el $-b/a$ y 0 da un valor positivo.

si $a>0$ $c>0$ y $b=0$

$f(x)=\frac{1}{ax^2+c}$

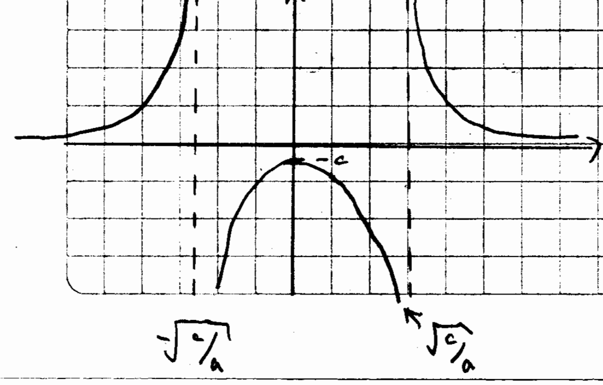


como arriba no hay 0's, entonces no cruza el eje x.
para cualquier valor siempre da positivo.
si $x=0$ $f(x)=c$
para valores muy grandes $f(x)$ es muy pequeño

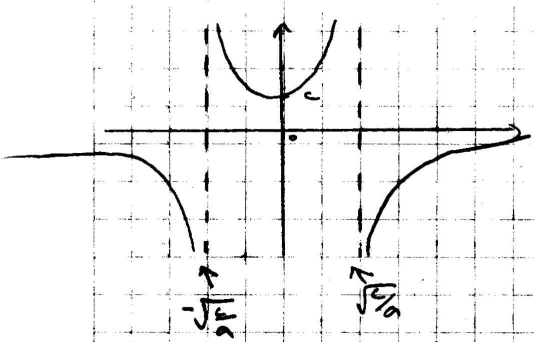
si $a>0$; $c<0$; $b=0$

$f(x)=\frac{1}{ax^2-c}$ $x=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

∴ hay asintotas en $\pm\sqrt{c/a}$
es polo par, los extremos son del mismo signo
para valores muy grandes, $f(x)$ es pequeña
para $x=0$ $f(x)=-c$ y como nunca cruza el eje x porque arriba no hay 0's, entonces en el intervalo se abre para abajo.



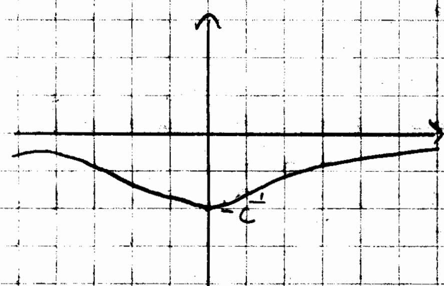
si $a<0$; $c>0$; $b=0$



$f(x)=\frac{1}{-ax^2+c}$ $\Rightarrow$ $x=\pm\sqrt{\frac{+c}{+a}}$

como es de polo par, los extremos son del mismo signo.
hay asíntotas en $\pm\sqrt{c/a}$.
si hacemos $x=0$, $f(0)=c$.
cualquier # en el intervalo $(-\sqrt{c/a}, \sqrt{c/a})$ es positivo.

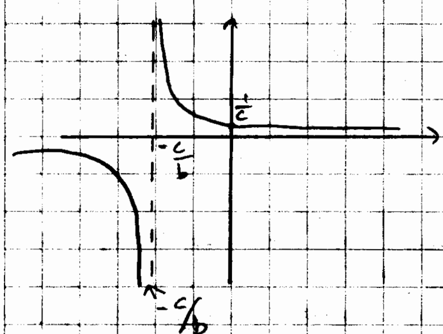
si $a<0$ $c<0$ $b=0$



$f(x)=\frac{1}{-ax^2-c}$

como arriba no hay 0's, nunca cruza el eje x.
cualquier valor es negativo.
y si $x=0$, $f(x)=-c$

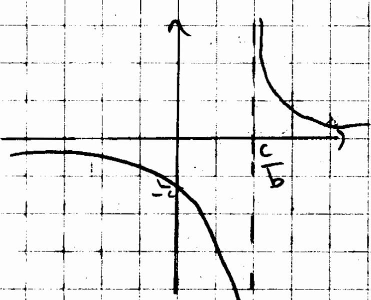
si $b>0$ $c>0$ $a=0$



$f(x)=\frac{1}{bx+c}$ $x=\frac{-c}{b}$

como es impar los extremos son de signo contrario.
tiene asíntota en $-c/b$.
para $x=0$, $f(x)=\frac{1}{c}$ y es positivo

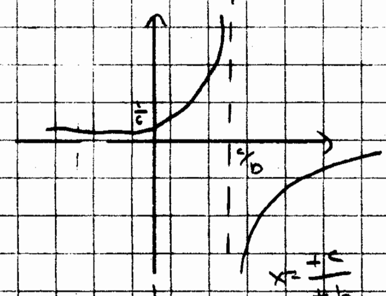
si $b>0$ $c<0$ $a=0$



$f(x)=\frac{1}{bx-c}$ $x=\frac{c}{b}$

como es impar los extremos son de signo contrario
tiene asíntota en c/b
para $x=0$ $f(x)=-\frac{1}{c}$

si $b<0$; $c>0$; $a=0$



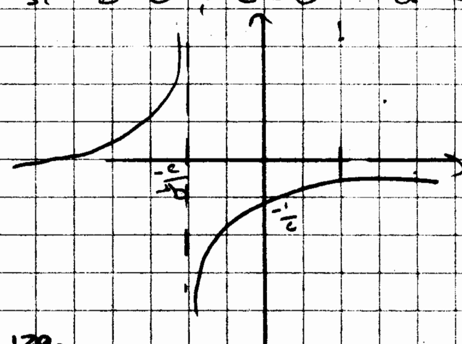
$f(x) = \frac{1}{-bx+c}$

si $x=0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{c}$

es como $f(x) = \frac{1}{x}$ sólo que al revés

sólo se recorre a la derecha ó a la izq.

si $b<0$; $c<0$; $a=0$



$f(x) = \frac{1}{-bx-c}$ $\qquad x = \frac{c}{-b}$

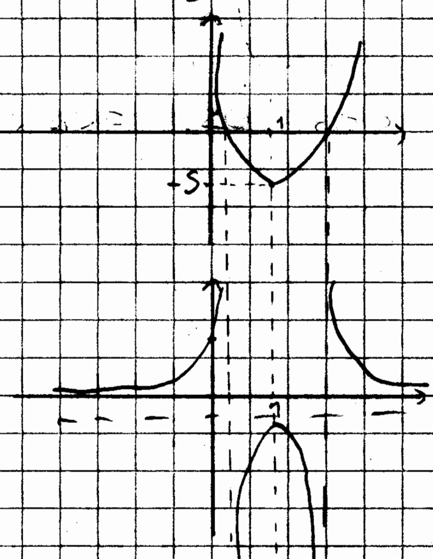
$x=0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{c}$

para graficar $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ donde $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$

se puede graficar $g(x) = ax^2+bx+c$
donde atraviesa el 0, ahí hay asíntotas.
y se pueden tomar los ejemplos anteriores, sólo que tomando en cuenta que se pueda recorrer hacia arriba ó hacia abajo, dependiendo de como se pueda factorizar.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-4}$

$g(x) = x^2-2x-4 = x^2-2x+1-5 = (x-1)^2-5$



como es par, los extremos son del mismo signo.
un valor intermedio es negativo
nunca se cruzan en los ejes x.