Distancia entre dos rectas.

Ideas del procedimiento general
(" de la clase)

1.- Debemos saber que la distancia entre una recta l_1 y otra recta l_2 es:
$$d(l_1, l_2) = \min(P, Q) \quad \text{donde } P \in l_1 \text{ y } Q \in l_2$$

2.- Sea $\vec{u}$ el vector dirección de P y
sea $\vec{v}$ el vector dirección de Q.

3.- Ahora escogemos unos puntos sobre las rectas ; $P_0 \in l_1$ y $Q_0 \in l_2$.

Entonces
$$l_1 = P_0 + s\vec{u} = P(s) \qquad s \in \mathbb{R}$$
$$l_2 = Q_0 + t\vec{v} = Q(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

4. Encontrar un vector que vaya de la recta l_1 a l_2 ; este puede ser:
$$\vec{w}(s,t)$$

5. Luego minimizamos este vector
$$\vec{w}_m(s_m, t_m)$$
para que así la respuesta se vea como
$$d(l_1, l_2) = \min |\vec{w}_m(s,t)|$$

Obs. Cuando encontremos el valor mínimo de $\vec{w}$, este va a ser perpendicular a las dos rectas
entonces
$$\vec{u} \cdot \vec{w}_m = 0 \quad \text{y} \quad v \cdot w_m = 0$$

6. Podemos ver que
$$\vec{w}_m = P(s_m) - Q(t_m)$$

y si $\vec{w}_0 = P_0 - Q_0$
$$\Rightarrow P(s_m) - Q(t_m) = w_0 + s_m\vec{u} - t_m\vec{v}$$

7. Por ser las rectas perpendiculares podemos escribir lo siguiente:
$$-\vec{u} \cdot \vec{w}_0 = s_m(\vec{u} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})t_m$$
$$-\vec{v} \cdot \vec{w}_0 = s_m(\vec{v} \cdot u) - t_m(\vec{v} \cdot \vec{v})$$

Por lo propuesto en clase podemos simplificar si

$a = u \cdot u \quad b = u \cdot v \quad c = v \cdot v \quad d = u \cdot w_0 \quad e = \vec{v} \cdot \vec{w}_0$

8- Y usando la nueva nomenclatura reescribiremos de una manera más simple:

$$a s_m - b t_m = d$$
$$b s_m - c t_m = e$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$s_c = \frac{be - cd}{ac - b^2}$$

$$t_c = \frac{ae - bd}{ac - b^2}$$

Ahora teniendo s_m y t_m podemos modificar la expresión original de la distancia entre las rectas

$$d(l_1, l_2) = |P(s_m) - Q(t_m)| = \left| (P_0 - Q_0) + \frac{(be - cd)\vec{u} - (ae - bd)\vec{v}}{ac - b^2} \right|$$

2. Encuentre la distancia entre la recta l_1 que pasa por los puntos P_{11} (1, 2, 1) y P_{12} (3, 1, 4); y la recta l_2 que pasa por P_{21} (2, 2, 6) y P_{22} (4, 1, 1).

Con el procedimiento previamente analizado, para resolver este ejercicio practicamente ya solo es meter los numeros y resolver algunas operaciones

Primero

$$d(l_1, l_2) = \min_{P\in l_1;\, Q\in l_2} (P, Q)$$

Sea

$\vec{u} = (-2, 1, -3)$ el vector direccion de P

$\vec{v} = (-2, 1, 5)$ el vector dirección de Q

$w_0 = P_0 - Q_0 = (1, 2, 1) - (2, 2, 6) = (-1, 0, -5)$

Ahora necesitamos encontrar los valores de

$a = u \cdot u = 4 + 1 + 9 = 14$ $\quad b = u \cdot v = 4 + 1 + (-15) = -10$

$c = v \cdot v = 4 + 1 + 25 = 30$ $\quad d = u \cdot w_0 = 2 + 0 + 15 = 17$

$e = v \cdot w_0 = 2 + 0 - 25 = -23$

para sustituirlos en la equacion que habiamos encontrado.

$$d(l_1, l_2) = \left| (P_0 - Q_0) + \frac{(be - cd)\vec{u} - (ae - bd)\vec{v}}{ac - b^2} \right|$$

$$\left| (-1, 0, -5) + \frac{(-10(-23) - 30(17))(-2, 1, -3) - (14(-23) - (-10)(-23))(-2, 1, 5)}{14(30) - (-10)^2} \right|$$

$$= |(-2.77, .88, 1.09)|$$