Vélez Mellado Patricia A.
Trabajo I: Geometría Analítica I 23/agosto/04

1. Grafique las sig. funciones cuadráticas, encontrando los elementos principales que la defines.

a) $Y = x^2 - 5x + 2$

i) forma

Como $a > 0$, la parabola está abierta hacia arriba

ii) vertice

$$Y = x^2 - 5x + 2$$

$$= x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2$$ completando el trinomio cuadrado perfecto

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 2$$

$$Y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

entonces las coordenadas ~~del~~ vértice son

$$V\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$$

iii) ~~eje de simetria~~ ceros

$$Y = x^2 - 5x + 2$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

Mead

Si $Y = 0$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{5}{2}$$

$Y = 0$ cuando $x = \frac{\sqrt{17} + 5}{2}$ o

$$x = \frac{-\sqrt{17} + 5}{2}$$

iv) eje de simetria

el eje de simetria de $Y = ax^2 + bx + c$ es una recta vértical que intersecta a la función en su vertice.

En la función $Y = x^2 - 5x + 2$ el vértice es el punto $\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$, así que su eje de simetria es:

$$x = \frac{5}{2}$$

Mead

v) intervalo en que crece y decrece

De acuerdo con las propiedades de la función cuadrática de la forma $a(x-b)^2+c$ la función decrece en el intervalo

$(-\infty, b)$ si $a>0$;

y en el intervalo

(b, ∞) si $a<0$.

Crece en el intervalo

(b, ∞) si $a>0$

y en el intervalo

$(-\infty, b)$ si $a<0$

En la función $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

$a=1$, $a>0$, por lo tanto la función:

- Crece en el intervalo $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$
- Decrece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

vi) Punto en el que $f(x)$ alcanza un máx. o mín.

Por la propiedad:

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$.
Si $x_1 \neq x_2$ de tal forma que $f(x_1)=f(x_2)$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo en $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ si $a>0$
y un máximo si $a<0$.

Mead

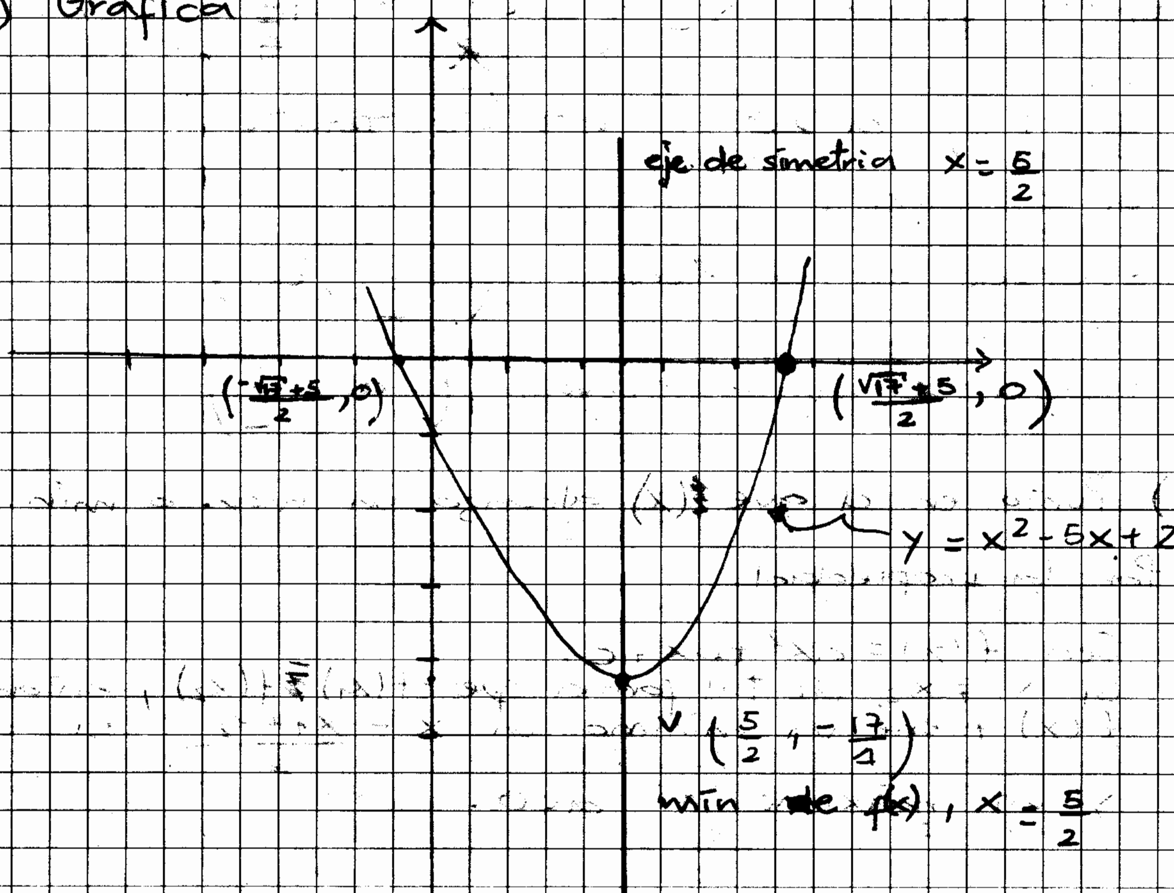
Sean $x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ y $x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ dos puntos de la función $y = x^2 - 5x + 2$;
la función tendrá un máx. o un mín. en el punto $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\sqrt{17} + 5 - \sqrt{17} + 5}{4} = \frac{5}{2}$.

Como $a = 1$, $a > 0$, entonces

- $y = x^2 - 5x + 2$ tiene un mínimo cuando $x = \frac{5}{2}$

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$

vii) Gráfica



b) $y = 3x^2 + 7x - 2$

i) forma

Como $a = 3$, $a > 0$, la función $y = 3x^2 + 7x - 2$; abre hacia arriba

ii) Vertice

$$y = 3x^2 + 7x - 2$$
$$= 3\left(x^2 + \frac{7}{3}x\right) - 2$$
$$= 3\left[x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} - \frac{49}{36}\right] - 2$$
$$= 3\left[x + \frac{7}{6}\right]^2 - \frac{49}{12} - 2$$
$$y = 3\left[x + \frac{7}{6}\right]^2 - \frac{73}{12}$$

Entonces la parabola se traslada $\frac{7}{6}$ u hacia la izq. en el eje x, y $\frac{73}{12}$ u hacia abajo en el eje Y. Su vertice es el punto

$$V\left(-\frac{7}{6}, -\frac{73}{12}\right)$$

iii) ceros

$$y = 3x^2 + 7x - 2$$
$$= 3\left[x + \frac{7}{6}\right]^2 - \frac{73}{12}$$

Si $y = 0$

$$3\left[x + \frac{7}{6}\right]^2 - \frac{73}{12} = 0$$
$$3\left[x + \frac{7}{6}\right]^2 = \frac{73}{12}$$
$$\left[x + \frac{7}{6}\right]^2 = \frac{73}{36}$$

$$x + \frac{7}{6} = \pm\frac{\sqrt{73}}{6}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{73}}{6} - \frac{7}{6}$$

• $3x^2+7x-2=0$ si $x=\frac{\sqrt{73}-7}{6}$ ó

si $x=\frac{-\sqrt{73}-7}{6}$

iv) eje de simetría

Sean $x_1=\frac{\sqrt{73}-7}{6}$ y $x_2=\frac{-\sqrt{73}-7}{6}$ dos puntos simétricos en $y=3x^2+7x-2$.

El eje de simetría de una función de la forma $y=ax^2+bx+c$ es una recta vertical.

$x=\frac{x_1+x_2}{2}$, donde x_1 y x_2 son puntos simétricos en la función.

Entonces para $y=3x^2+7x-2$ el eje de simetría es:

$$x=\frac{\sqrt{73}-7-\sqrt{73}-7}{12}=\frac{-14}{12}=-\frac{7}{6}$$

• eje de simetría $x=-\frac{7}{6}$

v) intervalo en que crece y decrece

De acuerdo con las propiedades de la función cuadrática de la forma $a(x+b)^2+c$ la función decrece en el intervalo

$(-\infty, b)$ si $a>0$;

y en el intervalo

(b, ∞) si $a<0$

Crece en el intervalo

(b, ∞) si $a>0$

y en el intervalo

$(-\infty, b)$ si $a<0$

En la función $3\left[x+\frac{7}{6}\right]^2-\frac{73}{12}$, $a=3$, $a>0$,

por lo tanto:

- Crece en el intervalo

$$\left(-\frac{7}{6}, \infty\right)$$

- Decrece en el intervalo

$$\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$$

vi) Punto en el en el (x alcanza su máx. o mín.)

- Sean $x_1 = \frac{\sqrt{73} - 7}{6}$ y $x_2 = \frac{-\sqrt{73} - 7}{6}$ dos puntos de la función $Y = 3x^2 + 7x - 2$.

Por la propiedad:
sea $y = ax^2 + bx + c$.
si $x_1 \neq x_2$ de tal forma $f(x_1) = f(x_2)$, entonces tiene un mínimo en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ si $a > 0$

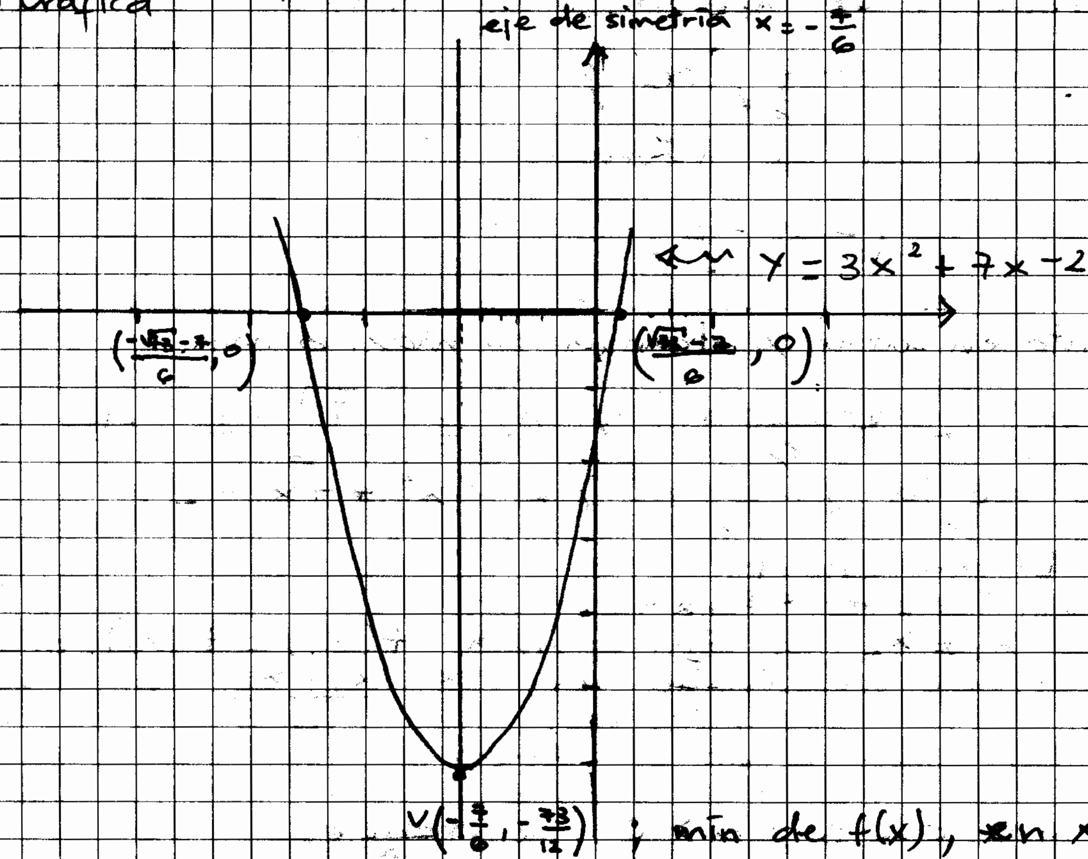
y un máximo si $a < 0$

- Como $a = 3$, $a > 0$ entonces

$Y = 3x^2 + 7x - 2$ tiene un mínimo en

$$x = \frac{\sqrt{73} - 7 - \sqrt{73} - 7}{12} = -\frac{14}{12} = -\frac{7}{6}$$

vii) Gráfica



; mín de $f(x)$, en $x = -\frac{7}{6}$

c) $y = -2x^2 + 5x + 2$

i) forma

Como $a = -2$, $a < 0$, la función $y = -2x^2 + 5x + 2$, abre hacia abajo

ii) Vértice

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2 + 5x + 2 \\
&= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 2 \\
&= -2\left[x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16}\right] + 2 \\
&= -2\left[x - \frac{5}{4}\right]^2 + \frac{25}{8} + 2 \\
y &= -2\left[x - \frac{5}{4}\right]^2 + \frac{41}{8}
\end{aligned}
$$

• Entonces la parabola se traslada $\frac{5}{4}$ u hacia la derecha en el eje X, y $\frac{41}{8}$ u hacia arriba en el eje Y.

Su vértice está en el punto

$$V\left(\frac{5}{4}, \frac{41}{8}\right)$$

iii) ceros

$$Y = -2x^2 + 5x + 2$$
$$= -2\left[x - \frac{5}{4}\right]^2 + \frac{41}{8}$$

Si $Y = 0$

$$-2\left[x - \frac{5}{4}\right]^2 + \frac{41}{8} = 0$$
$$-2\left[x - \frac{5}{4}\right]^2 = -\frac{41}{8}$$
$$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{\sqrt{41}}{4}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{41}}{4} + \frac{5}{4}$$

- $-2x^2 + 5x + 2 = 0$ si $x = \frac{5+\sqrt{41}}{4}$ ó si $x = \frac{5-\sqrt{41}}{4}$

iv) eje de simetría

Sean $x_1 = \frac{5+\sqrt{41}}{4}$ y $x_2 = \frac{5-\sqrt{41}}{4}$ dos puntos simétricos en $Y = -2x^2 + 5x + 2$.

El eje de simetría de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una recta vertical

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, donde x_1 y x_2 son puntos simétricos de la función.

Entonces para $Y = -2x^2 + 5x + 2$ el eje de simetría es:

$$x = \frac{5+\sqrt{41} + 5 - \sqrt{41}}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

- eje de simetría $x = \frac{5}{4}$

v) Intervalo en que crece y decrece.

De acuerdo con las propiedades de la función cuadrática de la forma $y = a(x-b)^2 + c$ la función decrece en el intervalo

$(-\infty, b)$ si $a > 0$;

y en el intervalo

(b, ∞) si $a < 0$

Crece en el intervalo

(b, ∞) si $a > 0$;

y en el intervalo

$(-\infty, b)$ si $a < 0$.

En la función $y = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8}$, $a = -2$, $a < 0$, por lo tanto

- Crece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$
- Decrece en el intervalo $\left(\frac{5}{4}, \infty\right)$

vi) Punto en el que x alcanza su máximo o min.

- Sean $x_1 = \frac{5+\sqrt{41}}{4}$ y $x_2 = \frac{5-\sqrt{41}}{4}$ dos puntos de la función $y = -2x^2 + 5x + 2$.

Por la propiedad:

Sea $y = ax^2 + bx + c$

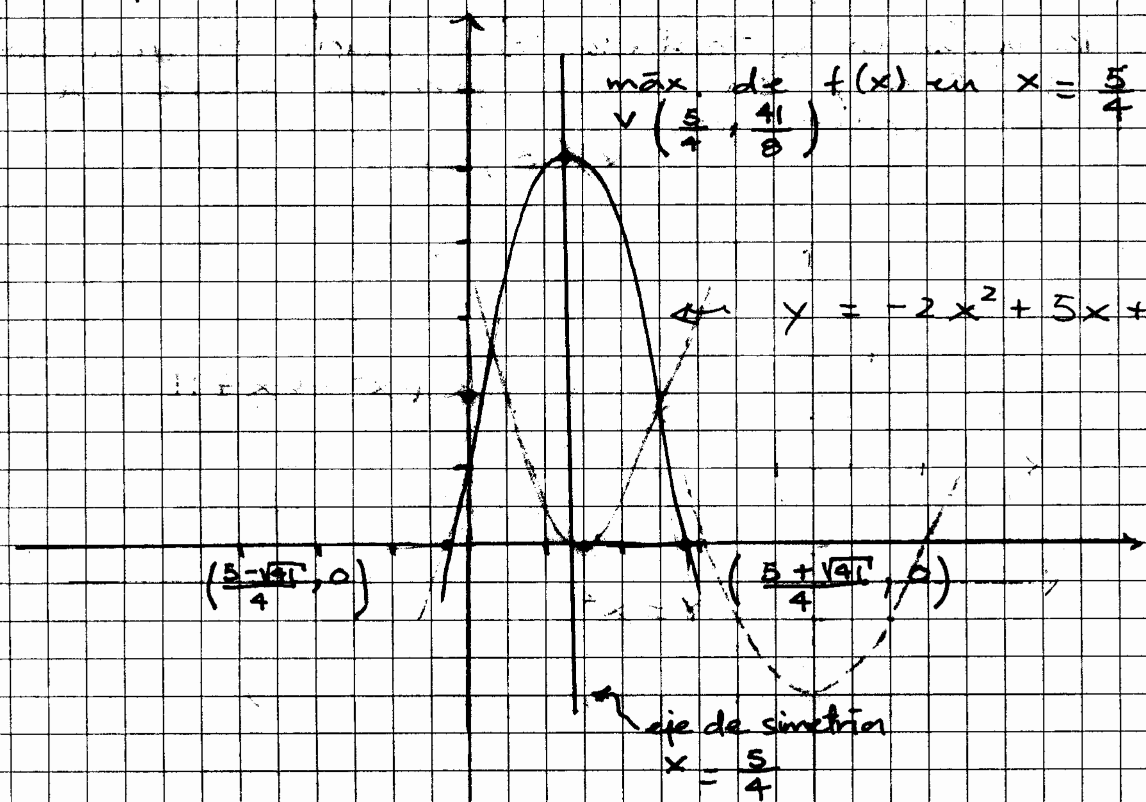
si $x_1 \neq x_2$ de tal forma que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, tiene un mínimo en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ si $a < 0$ y un máximo si $a > 0$.

- En $y = -2x^2 + 5x + 2$, $a = -2$, $a < 0$, entonces la función y tiene un máximo en

$$x = \frac{5+\sqrt{41} + 5-\sqrt{41}}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

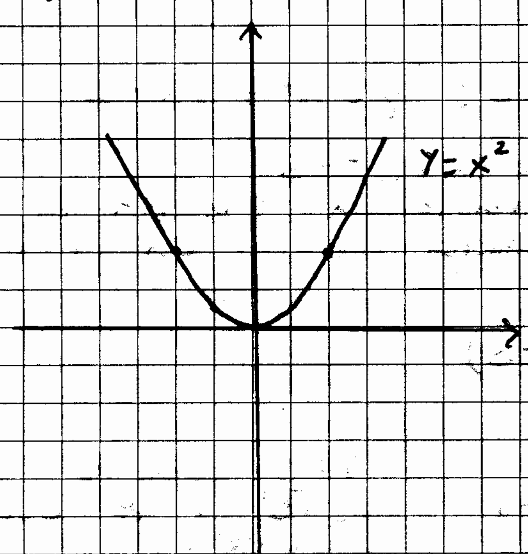
Mead

vii) Grafica



2. Trasladar la parábola $y = x^2$ paralelamente a sí misma a

a) 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba



$y = x^2$

→ Pasar a la forma

$y = a(x-b)^2 + c$

Con $a = 1$, $b = 3$ y $c = 2$

$y = (x-3)^2 + 2$

→ ec. en la forma

$y = ax^2 + bx + c$

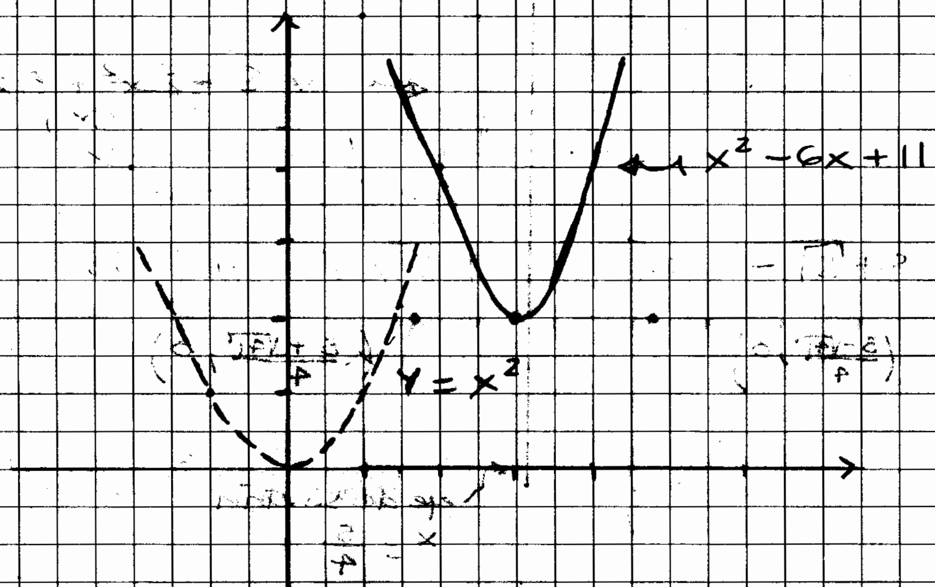
$y = x^2 - 6x + 11$

Mead

→ Vértice de la función $Y = (x-3)^2+2$

Como la parábola se traslada 3 u. hacia la derecha sobre el eje X y 2u. hacia arriba sobre el eje Y el vértice es:

$V(3, 2)$



b) 1 unidad a la izq. y 3 unidades hacia abajo.

$Y = x^2$; cambiar a la forma $a(x-b)^2+c = y$ con $a=1$, $b=-1$, $c=-3$

$Y = (x+1)^2-3$

ec. en la forma $y = ax^2+bx+c$: $Y = x^2+2x-2$

→ Vértice de la función $Y = (x+1)^2-3$

Como la parábola se traslada 1 u hacia la izq. en el eje X y 3 u hacia abajo en el eje Y el vértice es:

$V(-1, -3)$

→ Ceros.

Si $Y = 0$

$(x+1)^2-3=0$

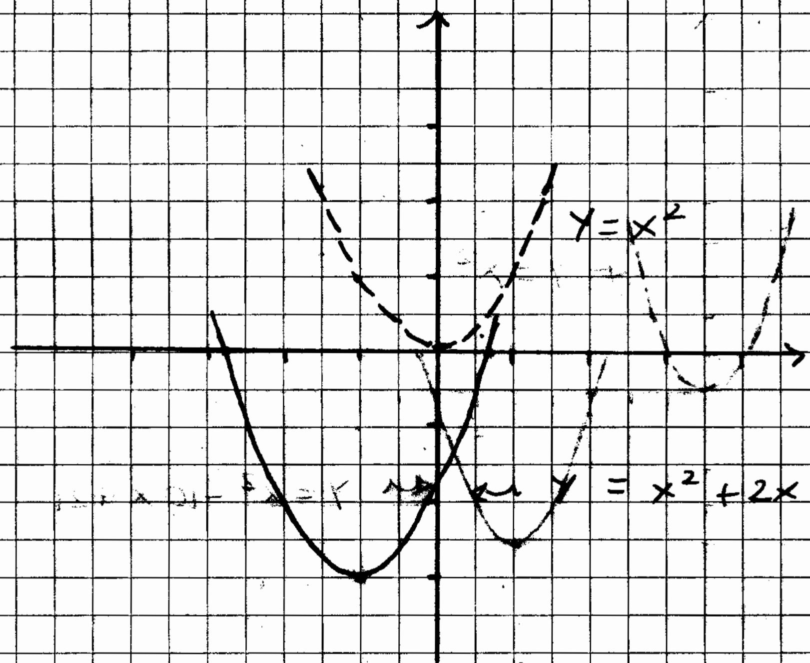
$(x+1)^2 = 3$

$x+1 = \pm\sqrt{3}$

$x = \pm\sqrt{3}-1$

$Y=0$ cuando $x = \sqrt{3}-1$ ó cuando $x = -\sqrt{3}-1$

Mead



c) 5 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo

→ $Y = x^2$; cambiar a la forma $a(x-b)^2 + c = Y$
con $a = 1$, $b = 5$, $c = -4$

$$Y = (x-5)^2 - 4$$

ec. en la forma $y = ax^2 + bx + c$: $Y = x^2 - 10x + 21$

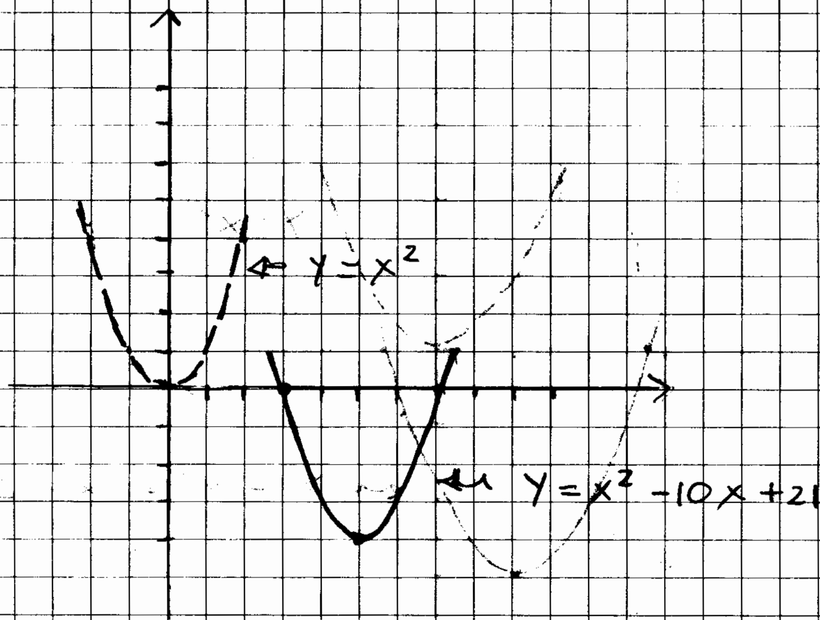
→ Vértice de la función $Y = (x-5)^2 - 4$.
Como la parábola se traslada 5 u hacia la derecha en el eje ~~x~~ X 4 u. hacia abajo en el eje Y, el vértice es:

$$V(5, -4)$$

→ Ceros
Si $Y = 0$

$(x-5)^2 - 4 = 0$
$(x-5)^2 = 4$
$x - 5 = \pm 2$
$x = \pm 2 + 5$
$x = 7$
$x = 3$

• $Y = 0$ cuando $x = 7$ ó $x = 3$



3. ¿Cómo hay que trasladar la parábola $y = x^2$ con respecto a los ejes coordenados para que la nueva ecuación de la parábola sea

a) $Y = x^2 - 8x + 7$
Completando cuadrados

$Y = x^2 - 8x + 16 - 16 + 7$
$Y = (x - 4)^2 - 9$

• Hay que trasladar la parábola $Y = x^2$, 4 unidades hacia la derecha sobre el eje x, y 9 unidades hacia abajo sobre el eje Y.

b) $Y = x^2 + 4x + 3$
Completando cuadrados

$Y = x^2 + 4x + 4 - 4 + 3$
$Y = (x + 2)^2 - 1$

• Hay que trasladar la parábola $Y = x^2$, 2 unidades hacia la izquierda sobre el eje x, y 1 unidades hacia abajo sobre el eje Y.

c) $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$

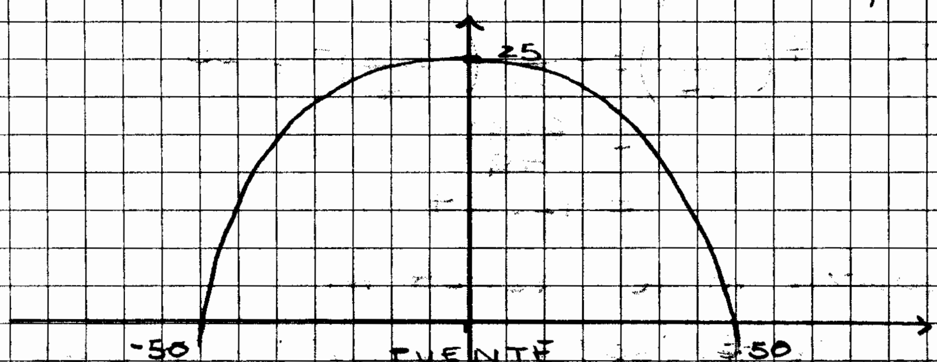
Completando cuadrados

$$y = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$y = \left[x - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}$$

- Hay que trasladar la parabola $y = x^2$ $\frac{1}{2}$ unidad hacia la derecha y $\frac{1}{4}$ de unidad hacia arriba.

4. Unpuente de 100 mts. que une dos poblados tiene una viga en forma parábolica. Se han dispuesto 6 soportes de la viga a lo largo del puente igualmente espaciados. La flecha, el punto más alto de la viga, tiene una altura de 25 mts. Calcule el tamaño de cada uno de los soportes.



El puente se representa por la función $f(x) = -ax^2 + 25$

$f(0) = 25$; $f(50) = 0$

$f(-50) = 0$

→ Encontrar la parábola $f(x) = -ax^2 + 25$ que pase por $(50, 0)$

$f(50) = 0$

$-a(50)^2 + 25 = 0$

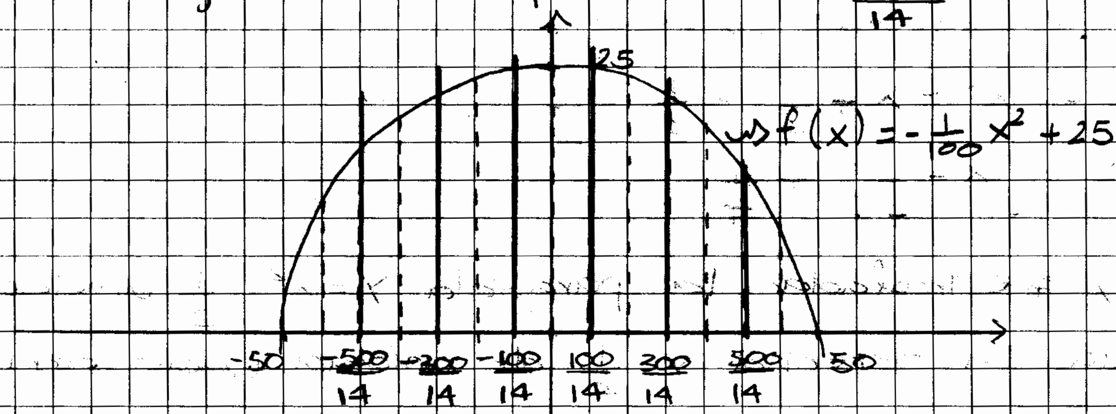
$-a = \frac{-25}{(50)^2}$

$a = \frac{1}{100}$

- La ecuación de la parábola es:

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 25$$

→ Dividir el segmento que va de -50 a 50 en 14 partes iguales. Cada parte mide $\frac{100}{14}$



→ Cada séptimo representa un soporte

Evaluar la función $f(x)$ para cada valor.

- Primer soporte $f\left(-\frac{500}{14}\right) = -\frac{1}{100}\left(-\frac{500}{14}\right)^2 + 25$

$$= \frac{600}{49}$$
$$= 12.24$$

→ El primer soporte mide 12.24 m

- Segundo soporte $f\left(-\frac{300}{14}\right) = -\frac{1}{100}\left(-\frac{300}{14}\right)^2 + 25$

$$= \frac{1000}{49}$$
$$= 20.4$$

→ El segundo soporte mide 20.4 m

- Tercer soporte $f\left(-\frac{100}{14}\right) = -\frac{1}{100}\left(-\frac{100}{14}\right)^2 + 25$

$$= \frac{1200}{49}$$
$$= 24.5\text{ m}$$

→ El tercer soporte mide 24.5 m

la función $f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 25$ no es inyectiva y además es simétrica $f\left(-\frac{500}{14}\right) = f\left(\frac{500}{14}\right)$;

$f\left(-\frac{300}{14}\right) = f\left(\frac{300}{14}\right)$ y $f\left(-\frac{100}{14}\right) = f\left(\frac{100}{14}\right)$, por

lo que el cuarto, quinto y sexto soporte

miden 24.5 m, 20.4 y 12.4 m respectivamente.