José Luis Cruz Rodríguez No. Cuenta: 40504958-3 Grupo: 4045 Fecha / Date: 23.08.04

Geometría Analítica I

Trabajo 1

1.- Grafique las siguientes funciones cuadráticas, encontrando los elementos principales que la definen (la forma, el vértice de la parábola que describe, el eje de simetría, los ceros y el intervalo en que crece y decrece o viceversa, y en que punto x alcanza su valor máximo ó mínimo).

a) $y = x^2 - 5x + 2$

Usando el método de completar el trinomio cuadrado:

$$y = x^2 - 5x + 2$$

$$= x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 2$$

$$= \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + 2$$

$$\boxed{y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}$$

1) y es una parábola que abre hacia arriba

2) Su vértice esta en $\left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$

3) Su eje de simetría esta en $x = \frac{5}{2}$

4) $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = 0$

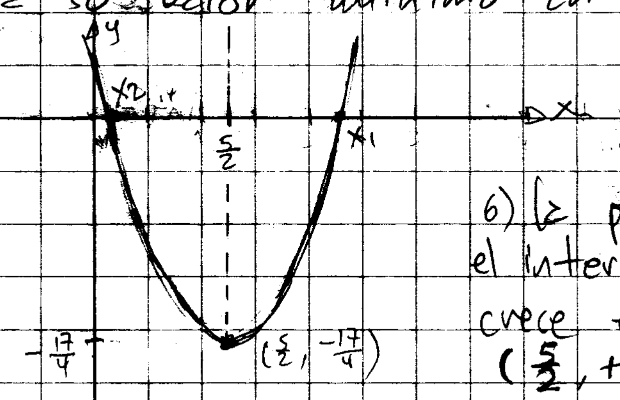
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = 4.56, \quad x_2 = 0.44$$

5) X alcanza su valor mínimo en $x = \frac{5}{2}$



6) la parábola decrece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$, y crece en el intervalo $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Notas / Notes:

Fecha / Date:

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$

Usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$a = 3$
$b = 7$
$c = -2$

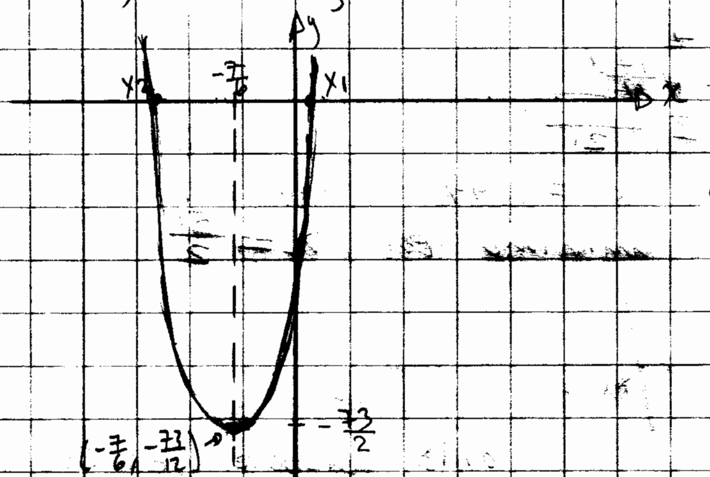
$$y = (3)\left(x + \frac{7}{2(3)}\right)^2 + (-2) - \frac{(7)^2}{4(3)}$$

$$= 3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - 2 - \frac{49}{12}$$

$$= 3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{73}{12}$$

1) la parábola abre hacia arriba
2) Su vertice está en $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{73}{12}\right)$
3) Su eje de simetría está en $x = -\frac{7}{6}$
4)
$$3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{73}{12} = 0$$
$$3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{73}{12}$$
$$\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{73}{36}$$
$$x + \frac{7}{6} = \pm\sqrt{\frac{73}{36}}$$
$$x = -\frac{7}{6} \pm \frac{\sqrt{73}}{6}$$
$$x_1 = 0.26, \quad x_2 = -2.59$$

5) x alcanza su valor mínimo en $x = -\frac{7}{6}$



6) la parábola decrece en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$, y crece en el intervalo $\left(-\frac{7}{6}, +\infty\right)$

Notas / Notes:

José Luis Cruz Rodríguez No. Cuenta: 40504958-3 Grupo: 4045 Fecha / Date: 23.08.04

c) $y = -2x^2 + 5x + 2$

Usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$a = -2$
$b = 5$
$c = 2$

$$y = (-2)\left(x + \frac{(5)}{2(-2)}\right)^2 + 2 - \frac{(5)^2}{4(-2)}$$

$$= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 2 + \frac{25}{8}$$

$$= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8}$$

1) La parábola abre hacia abajo
2) Su vértice está en $\left(\frac{5}{4}, \frac{41}{8}\right)$
3) Su eje de simetría está en $x = \frac{5}{4}$
4) $-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} = 0$

$$-2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{41}{8}$$

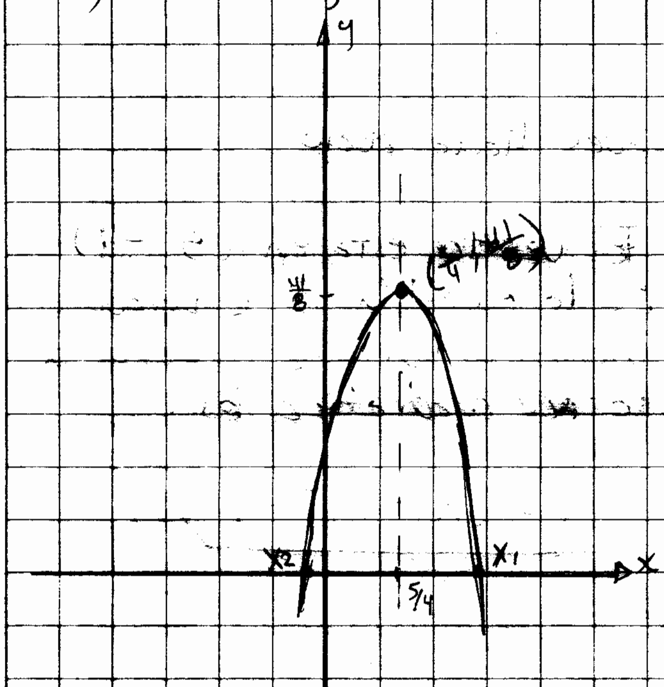
$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{41}{16}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{41}{16}}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$$

$$x_1 = 2.85, \quad x_2 = -0.35$$

5) x alcanza su valor máximo en $x = \frac{5}{4}$

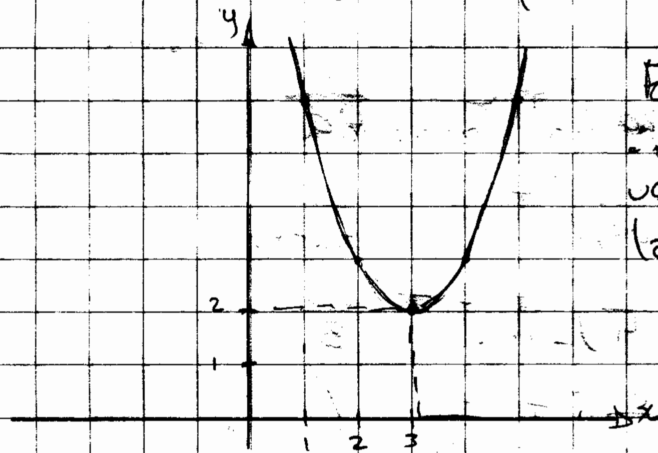


6) La parábola crece en el intervalo $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ y decrece en el intervalo $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$

Notas / Notes:

2 - Trasladar la parábola $y=x^2$ paralelamente a sí misma a

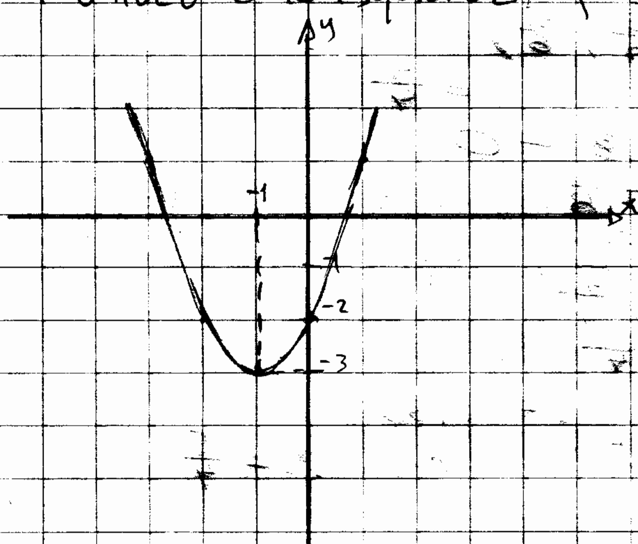
a) 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.



El vertice está en $(3,2)$ ∴ la ecuación de la parábola usando la fórmula general de la ec. cuadrática es:

$$y=(x-3)^2+2$$

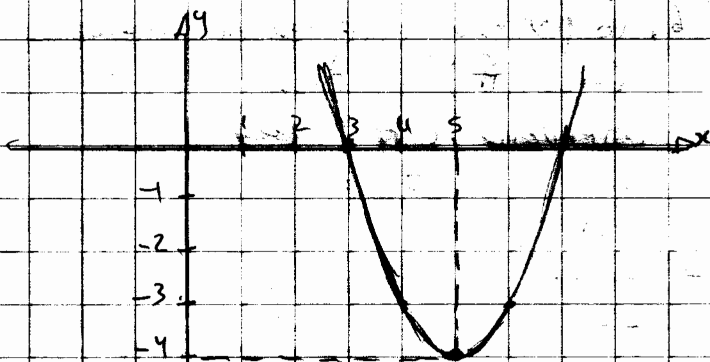
b) 1 unidad a la izquierda y 3 unidades hacia abajo



El vértice está en $(1,-3)$ ∴ la ecuación de la parábola usando la fórmula general de la ec. cuadrática es:

$$y=(x+1)^2-3$$

c) 5 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo.



El vértice está en $(5,-4)$ ∴ la ecuación de la parábola usando la fórmula general de la ec. cuadrática es:

$$y=(x-5)^2-4$$

José Luis Cruz Rodríguez No. de Cuenta: 40504958-3 Grupo: 4045 | Fecha / Date: 23.08.04

¿Cómo hay que trasladar la parábola $y = x^2$ con respecto a los ejes coordenados para que la nueva ecuación de la parábola sea:

a) $y = x^2 - 8x + 7$

Completando el trinomio cuadrado:

$$y = x^2 - 8x + 7$$
$$= x^2 - 8x + 16 - 16 + 7$$
$$= (x^2 - 8x + 16) - 16 + 7$$
$$= (x - 4)^2 - 9$$

El vértice esta en $(4, -9)$ ∴ Se tendría que trasladar **4** unidades a la **derecha** y **9** unidades hacia **abajo**.

b) $y = x^2 + 4x + 3$

Usando la formula general para la función cuadrática:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$a = 1$
$b = 4$
$c = 3$

$$y = (1)\left(x + \frac{(4)}{2(1)}\right)^2 + 3 - \frac{(4)^2}{4(1)}$$
$$= (x + 2)^2 + 3 - 4$$
$$y = (x + 2)^2 - 1$$

El vértice esta en $(-2, -1)$ ∴ Se tendría que trasladar **2** unidades a la **izquierda** y **1** unidad hacia **abajo**.

c) $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$

Usando la formula general para la función cuadrática:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

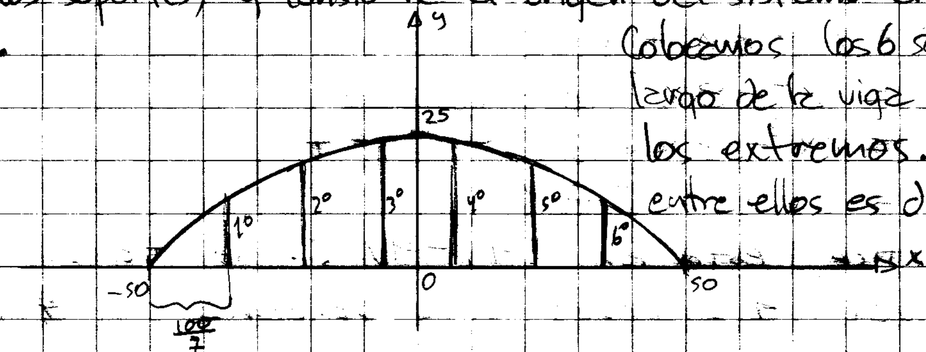
$a = 1$
$b = -1$
$c = \frac{1}{2}$

$$= (1)\left(x + \frac{(-1)}{2(1)}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{4(1)}$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

El vértice esta en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ∴ Se tendría que trasladar $\frac{1}{2}$ unidad a la **derecha** y $\frac{1}{4}$ de unidad hacia **arriba**.

RHEIN | Notas / Notes:

4.- Un puente de 100 mts. que une dos poblados, tiene una viga en forma parabólica. Se han dispuesto 6 soportes de la viga a lo largo del puente igualmente espaciados. La flecha, vamos, el punto más alto de la viga, tiene una altura de 25 mts. Calcule el tamaño de cada uno de los soportes. **Sugerencia:** Haga un dibujo del puente con la viga y los soportes, y considere el origen del sistema en el centro del puente.



Colocamos los 6 soportes a lo largo de la viga sin contar los extremos. La distancia entre ellos es de $\frac{100}{7}$ mts

Tomamos el origen a la mitad del puente. Tenemos una parábola que abre hacia abajo y cuyo vértice está en $(0,25)$, y su ecuación es de la forma:

$$y = ax^2 + 25 \quad , \text{con } a < 0$$

cuando $x = 50$, $y = 0$ $\therefore$ $a(50)^2 + 25 = 0$

$$a(2500) = -25$$
$$a = -\frac{25}{2500}$$
$$a = -\frac{1}{100}$$

$\therefore$ la ec. de la parábola es $y = -\frac{1}{100}x^2 + 25$

Ahora calculemos las distancias de los soportes a partir del lado izquierdo del puente, o sea a partir de $x = -50$ y evaluamos a **y** en esos valores de **x** para obtener el tamaño de los soportes.

Soporte	Posición (x)	Tamaño
1	$-50 + \frac{100}{7} = \frac{-350+100}{7} = \frac{-250}{7}$	$-\frac{1}{100}\left(-\frac{250}{7}\right)^2 + 25 = 12.24$ mts
2	$-\frac{150}{7}$	20.41 mts
3	$-\frac{50}{7}$	26.02 mts
4	$\frac{50}{7}$	26.02 mts
5	$\frac{150}{7}$	20.41 mts
6	$\frac{250}{7}$	12.24 mts