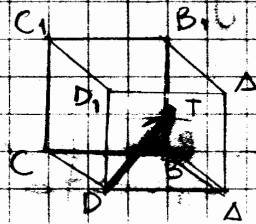
Vélez Mellado Patricia 5/nov/04

1.24 En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ los puntos M, N, P, Q, R, S, T son los puntos medios de las aristas. Los vectores $i = \vec{BA}$, $j = \vec{BC}$, $k = \vec{BB_1}$ se ~~toman por~~ base. Desarróllense en la base i, j, k los vectores sig:

a) $\vec{DT}$



Se tiene que:

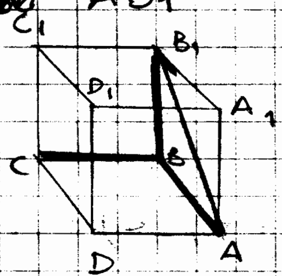
$$\vec{DT} = \vec{DB} + \vec{BT}$$

pero $\vec{DB} = -\vec{BD} = -[i + j] = -i - j$

$$\vec{BT} = 0i + 0j + \frac{1}{2}k$$

$$\Rightarrow \vec{DT} = -i - j + \frac{1}{2}k$$

b) $\vec{AB_1}$



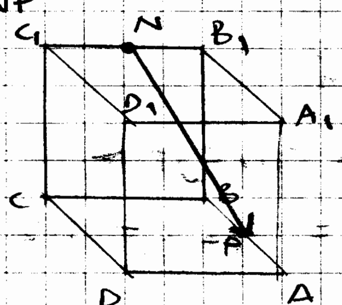
$$AB_1 = \overline{AB} + \overline{BB_1}$$

luego, $\vec{AB} = -\vec{BA} = -i$

$$\vec{BB_1} = k$$

$$\Rightarrow AB_1 = -i + 0j + k$$

c) $\vec{NP}$



$$\vec{NP} = \vec{NR} + \vec{RP}$$

$$\vec{NR} = \vec{NB} + \vec{BR}$$

con

$$\vec{NB} = -\vec{BN} = -\left(\frac{1}{2}j + k\right) = -\frac{1}{2}j - k$$

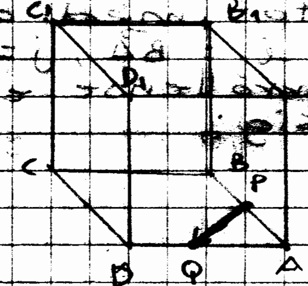
$$\vec{BR} = \vec{BC} + \vec{CR} = j + \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \vec{NR} = 1/2\, i + \frac{1}{2}j - k$$

y $\vec{RP}$ // BC pero en sentido opuesto $\Rightarrow \vec{RP} = -j$

$$\Rightarrow \vec{NP} = 1/2\, i - 1/2\, j - k$$

d) $\overrightarrow{PQ}$



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

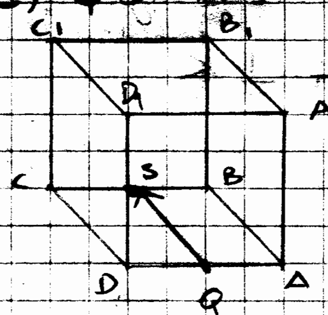
con

$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{BP} = -1/2\, i$

$\overrightarrow{BQ} = i + 1/2\, j$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = 1/2\, i + 1/2\, j$

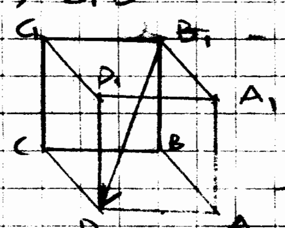
e) $\overrightarrow{QS}$



$\overrightarrow{QS}$ es paralelo a $\overrightarrow{BA}$ pero está en sentido opuesto

$\Rightarrow \overrightarrow{QS} = -\overrightarrow{BA} = -i + 0j + 0k$

f) $\overrightarrow{B_1D}$



$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1T} + \overrightarrow{TD}$

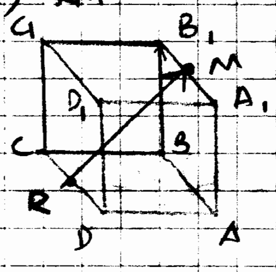
con

$\overrightarrow{B_1T} = -1/2\, k$

$\overrightarrow{TD} = -\overrightarrow{DT} = -(-i - j + 1/2\, k) = i + j - 1/2\, k$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1D} = i + j - k$

g) $\overrightarrow{RM}$



$\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NM}$

$\overrightarrow{RN} = -\overrightarrow{NR} = -1/2\, i - 1/2\, j + k$

$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB_1} + \overrightarrow{B_1M} = 1/2\, i - 1/2\, j$

$\Rightarrow \overrightarrow{RM} = -j + k$

h) $\overrightarrow{RN}$

$\overrightarrow{RN} = -\overrightarrow{NR}$

por (c)

$\overrightarrow{NR} = 1/2\, i + 1/2\, j - k$

$\Rightarrow \overrightarrow{RN} = -1/2\, i - 1/2\, j + k$

1.34. Se da el vector $a = (3, -4)$. Hállense las coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector a.

Cualquier vector $\perp$ a a cumple que

$$a \cdot b = 0$$

los vectores b y $-b$ satisfacen lo anterior

$\Rightarrow$ Si se considera a $b = (4, 3)$ y $-b = (-4, -3)$, resulta que los vectores $\perp$'s unitarios a $\bar{a}$ son

$$w = \pm \frac{b}{|b|}$$

con

$$|b| = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{b}{|b|} = (4/5, 3/5) \quad ; \quad w_2 = \frac{-b}{|b|} = (-4/5, -3/5)$$

1.42. Se dan dos vectores: $a = (3, -1, 5)$ y $b = (1, 2, -3)$. Hállese el vector x que es $\perp$ al eje Oz y satisfaga $x \cdot a = 9$ $x \cdot b = -4$

Cualquier vector de coordenadas $(x_1, x_2, 0)$ es perpendicular al eje Oz,

considerando a $x = (x_1, x_2, 0)$ se tiene que

$$(x_1, x_2, 0) \cdot (3, -1, 5) = 9$$
$$(x_1, x_2, 0) \cdot (1, 2, -3) = -4$$

es decir:

$$3x_1 - x_2 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 = -4$$

$$6x_1 - 2x_2 = 18$$
$$x_1 + 2x_2 = -4$$
$$7x_1 = 14$$
$$x_1 = 2$$

$$2 + 2x_2 = -4$$
$$x_2 = -3$$

$$\Rightarrow x = (2, -3, 0)$$

1.56. Se dan los vectores $a = (-2, 1, 1)$, $b = (1, 5, 0)$, y $c = (2, 2, -1)$. Calcular: a) $pr_b a$; b) $pr_a b$; c) $pr_{a+b} c$; d) $pr_a(b+c)$; e) $pr_d(2b+c)$

a) $pr_b a$

$pr_b a = |a| \cos \widehat{a,b}$

Se tiene que

$a \cdot b = (-2, 1, 1) \cdot (1, 5, 0) = -2 + 5 = 3$

$3 = |a||b| \cos \widehat{ab}$

$$\cos \widehat{ab} = \frac{3}{|a||b|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{26}}$$

$$pr_b a = \sqrt{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

b) $pr_a b$

$pr_a b = |b| \cos \widehat{a,b}$

del (a) se tiene que $\cos \widehat{ab} = 3 / \sqrt{6}\sqrt{26}$

$$\Rightarrow pr_a b = \sqrt{26} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

c) $pr_{a+b} c$

$pr_{a+b} c = |c| \cos \theta$

con $\theta =$ ángulo entre $\bar{a} + \bar{b}$ y $\bar{c}$

$\bar{a} + \bar{b} = (-2, 1, 1) + (1, 5, 0) = (-1, 6, 1)$

$\Rightarrow \bar{c} \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = (2, 2, -1) \cdot (-1, 6, 1) = -2 + 12 - 1 = 9$

$9 = |c||a+b| \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{9}{|c||a+b|} = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{38}} = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

$$pr_{a+b} c = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{38}} = \frac{9}{\sqrt{38}}$$

d) $Pr_a (b+c)$

$Pr_a (b+c) = |b+c| \cos\theta$

con $\theta = \sphericalangle$ ~~entre~~ a y $b+c$

$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = 3 - 3 = 0$

$\therefore \theta = 90°$

$Pr_a (b+c) = 0$

e) $Pr_a (2b+c)$

$Pr_a (2b+c) = |2b+c| \cos\theta$

con $\theta = \sphericalangle$ entre a y $2b+c$

$a \cdot (2b+c) = (a \cdot 2b) + (a \cdot c) = 6 - 3 = 3$

$3 = |a|\,|2b+c| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{3}{|a|\,|2b+c|} = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{161}}$$

$$Proy_a(2b+c) = \sqrt{161} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{161}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

1.57) Determínese, si es derecha o izq. la terna de los vectores a, b, c si

a) $a = -i - j$, $b = j$, $c = k$ izquierda

b) $a = i - j$, $b = j$, $c = i + j$ izquierda

c) $a = i - j$, $b = i + j$, $c = k$ derecha

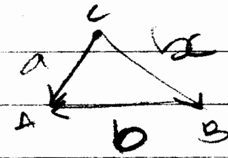
1.58) Hállese el vector $[a; b]$ y represéntese, si:

a) $a = 2i$, $b = 3j$

$a = (2,0,0)$ y $b = (0,3,0)$

$a \times b = (0,0,6)$

$a \times b = 6k$



b) $a = 3i - 2k$, $b = 4k$

$a = (3, 0, -2)$ y $b = (0, 0, 4)$

$$a \times b = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad a \times b = -12j$$

c) $a = i + j + k$, $b = 2i - 3j + 4k$

$a = (1, 1, 1)$, $b = (2, -3, 4)$

$$a \times b = \begin{pmatrix} 4 + 3 \\ -2 - 4 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad a \times b = 7i - 2j - 5k$$

1.59) Hallése el área del paralelogramo construido sobre los vectores $a = (3, 4)$ y $b = (4, -3)$

Se tiene $\text{Area}(a, b) = a_1 b_2 - b_2 a_2$
$= -9 - 16$
$= -25$

1.61) Hállese el área del Δ con los vertices en los puntos $A(0, 2, 6)$, $B(4, 0, 0)$ y $C(8, -2, 0)$

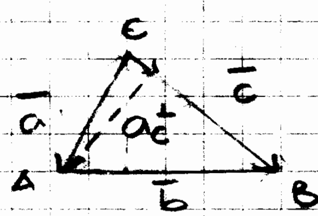
El triángulo esta dado por los vectores

$\vec{a} = \vec{CA} = (-8, 4, 6)$

$\vec{b} = \vec{BA} = (-4, 2, 6)$

$\bar{c} = \vec{CB} = (-4, 2, 0)$

Tomando como base el vector $\bar{c}$ como base del Δ, se tiene que la altura es: el vector $\perp$ al vector αc,



$\alpha = \text{Proy}_c\, a$

$\Rightarrow a = a_c + a_c^{\perp}$

es decir

$$a_c^{\perp} = a - a_c$$

como $a_c \perp a_c^{\perp}$

$a_c \cdot a_c^{\perp} = 0$

$(\alpha \vec{c}) \cdot (\bar{a} - a_c) = 0$

$(\alpha \vec{c}) \cdot (\bar{a} - \alpha \vec{c}) = 0$

$\alpha(-4,2,0) \cdot [\,[-8,4,6] - \alpha(-4,2,0)\,] = 0$

$(32 + 8) - \alpha(16+4) = 0$

$\alpha = 40/20 = 2$

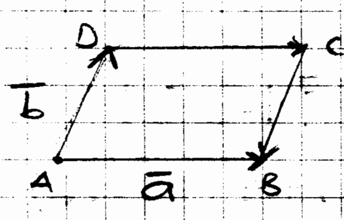
$\Rightarrow a_c^{\perp} = (-8,4,6) - 2(-4,2,0)$

$= (-8,4,6) + (8,-4,0)$

$= (0,0,6)$

$\Rightarrow \text{area}\,(\Delta) = \dfrac{|\bar{c}|\,|a_c^{\perp}|}{2} = \dfrac{\sqrt{20}\cdot 6}{2} = 3\sqrt{20}$

62) Se dan los vértices del paralelogramo: $A(1,-2)$, $B(-2,2)$, $C(4,10)$ y $D(7,6)$. Calcúlese su área y su altura.



El paralelogramo tiene lados:

$\bar{a} = \vec{AB} = (-2,2) - (1,-2) = (-3,4)$

$\bar{b} = \vec{AD} = (7,6) - (1,-2) = (6,8)$

El área esta dada por

$A(ABCD) = |a_1 b_2 - b_1 a_2| = |-24 - 24| = |-48|$

altura, la altura se representa por el vector $\perp$ a $\bar{b}_a = \alpha \bar{a}$

$\bar{b} = b_a + b_a^{\perp}$, $\quad \bar{b}_a^{\perp} = \bar{b} - \bar{b}_a$

$b_a \cdot b_a^{\perp} = 0$

$\alpha \vec{a} \cdot (\bar{b} - \alpha \bar{a}) = 0$

$\alpha(-3,4) \cdot ((6,8) - \alpha(-3,4)) = 0$

$(-18 + 32) - \alpha(9+16) = 0$

$\alpha = 14/25$

$\Rightarrow \quad b_a^{\perp} = (6,8) - \alpha (-3,4)$

$$b_a^{\perp} = (6,8) - \frac{14}{25}(-3,4)$$

$$b_a^{\perp} = \left(\frac{192}{25}, \frac{144}{25}\right)$$

70) Determínese si son coplanares los vectores $a = (8,5,-13)$, $b = (-4,2,8)$, $c = (4,7,-4)$; si son coplanares qué terna forman.

Si son coplanares $\Rightarrow$ son linealmente dependientes, es decir,

$$\beta_1 (8,5,-13) + \beta_2 (-4,2,8) + \beta_3 (-4,7,-4) = 0$$

esto produce un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 8\beta_1 - 4\beta_2 + 4\beta_3 &= 0 \\ 5\beta_1 + 2\beta_2 + 7\beta_3 &= 0 \\ -13\beta_1 + 8\beta_2 - 4\beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene solución distinta de cero si el determinante es distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ -13 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -13 & -4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -13 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 8(-8-56) + 4(-20+91) + 4(40+26)$$

$$= -512 + 284 + 264 = 36$$

$\therefore$ los vectores son coplanares.

71. Determínese si son coplanares los vectores $a = (-2, -1, -3)$, $b = (-1, 4, 6)$, $c = (1, 5, 9)$

los vectores son coplanares si existen números α_1, α_2 y $\alpha_3 \neq 0$ tales que:

$$\alpha_1(-2,-1,-3) + \alpha_2(-1,4,6) + \alpha_3(1,5,9) = 0$$

$$-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$-\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0$$
$$-3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0$$

el sistema tiene solucion no trivial si el determinante es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -2(36-30) + 1(-9+15) + 1(-6+12)$$

$$= 16$$

$\therefore$ los vectores $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son coplanares

checa la matriz asociada al sistema