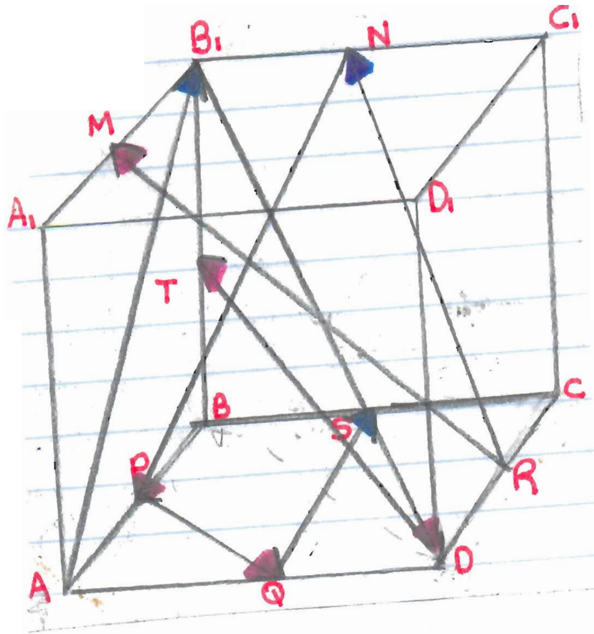
GEOMETRIA ANALITICA / PROF. PABLO BARRERA / ADJUNTO. GUILMER

NOMBRE: CINDY OLIVARES DEL MONTE

1.24 En el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ los puntos M, N, P, Q, R, S, T son los puntos medios de las aristas. Los vectores $i = \vec{BA}$, $j = \vec{BC}$, $k = \vec{BB_1}$ se toman por base. Desarróllese en la base i, j, k los vectores siguientes:



a) $\vec{DT} = \vec{DB} + \vec{BT} = (AD - DC) + \frac{1}{2} BB_1$

$= (AB + BD) - (DB + BC) + \frac{1}{2} BB_1$

$= -i + BD - DB - BC + \frac{1}{2} BB_1 = -i - j + \frac{1}{2} k$

b) $\vec{AB_1} = AB + BB_1 = -i + k$

c) $\vec{NP} = NB_1 + B_1P =$ $\quad B_1B + \frac{1}{2} BA = B_1P$

$-k + \frac{1}{2} i = B_1P$

$NB_1 + B_1P = -\frac{1}{2} BC \quad (-k + \frac{1}{2} i)$

$= \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j - k$

d) $\vec{PQ} = PA + AQ = \frac{1}{2} BA + \frac{1}{2} BC$ $\qquad AQ \parallel BC$

$= \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j$

e) $\vec{QS} = QA + AS = -\frac{1}{2} BC + (AB + \frac{1}{2} BC)$

$-\frac{1}{2} BC + (-i + \frac{1}{2} BC) = -\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} BC - i = -i$

f) $\vec{B_1D} = B_1A + AD = i + j - K$ porque $AD \parallel BC$

g). $\vec{RM} = RN + NM$ doude $NM = NB_1 + B_1M = -\frac{1}{2}BC + B_1M$ porque $NB_1 \parallel BS$

$B_1M = \frac{1}{2} B_1A_1$ doude $B_1A_1 \parallel DA$; $B_1M = \frac{1}{2}$ BA

$NM = -\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} BA$

$\vec{RM} = \vec{RN} + \vec{NM}$

$= -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + K - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}i = -j + K$

h) $\vec{RN} = \vec{RC} + \vec{CN} = -\frac{1}{2}AB + CN$

$AB \parallel DC$ $\quad B_1C_1 \parallel BC$

$-i \parallel -i$

$BN = BB_1 + B_1N$

$BN = BB_1 + \frac{1}{2} B_1C_1$

$BN = BB_1 + \frac{1}{2} BC$

$CN = CB + BN$

$= CB + BB_1 + \frac{1}{2} BC$

$\vec{RN} = \frac{1}{2} AB + CB + BB_1 + \frac{1}{2} BC$

$= -\frac{1}{2}i + K + \frac{1}{2}j - j = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + K$

1.34 Se da el vector $a = (3, -4)$. Hallése las coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector a.

Sabemos que $W \cdot V = 0$ porque son perpendiculares. $W = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$

$a = 3\alpha_1 - 4\alpha_2$.

Si $\alpha_2 = 3$ y $\alpha_1 = 4$ se cumple lo anterior $W_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \perp V$

Si $\alpha_2 = -3$ y $\alpha_1 = -4$ se cumple lo anterior $W_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \perp V$

$\|w\| = \sqrt{16+25} = 5$

$\|V\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

Para encontrar el vector unitario tengo:

1) Encontrar $\|V\| = 5$

2) Ahora se multiplica V por el escalar $\frac{1}{\|V\|} = \frac{1}{5} = \alpha$

$$\frac{V}{\|V\|} = \frac{(4i+3j)}{5} = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j = W_1'$$

$\|w'\| = \alpha|W| = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$ → El vector unitario.

$$W_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{V}{\|V\|} = \frac{(-4i - 3j)}{5} = -\frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j = W_2'$$

$\|w'\| = \alpha|W| = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$

$$W_2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

1.42 Se dan 2 vectores $a=(3,-1,5)$ y $b=(1,2,-3)$. Hallése el vector x que es perpendicular al eje Oz y satisfaga las condiciones $x\cdot a=9$ y $x\cdot b=-4$

Inicialmente tenemos que

$$a\cdot x = \begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=9 \qquad b\cdot x=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-4$$

Se puede formar un sistema de ecuaciones con 3 incognitas donde la tercera ecuación es el vector (x,y,z) que es perpendicular al eje Oz es decir ortogonal a $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Sabemos que la condición de perpendicularidad es que el producto escalar sea igual a cero

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

$$(x,y,z) \perp \{(x,y,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}3x-y+5z&=9\\ x+2y-3z&=-4\\ z&=0\end{aligned}$$

Resolvemos

$$\begin{aligned}\cancel{3x}-y+5z&=9\\ (-3)\quad \cancel{-3x}-6y\ \ 9z&=12\\ \hline -7y+14z&=21\end{aligned}$$

Pero $z=0$

$$-7y=21$$
$$y=-3$$

Sustituyo.

$$3x-y=9$$
$$3x-(-3)=9$$
$$3x=9-3$$
$$3x=6$$
$$x=2$$

Por lo tanto, el vector x perpendicular al eje Oz es $\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

Comprobación:

$$a\cdot x=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=(6+3+0)=9$$

$$x\cdot b=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=(2-6+0)=-4$$

1.56 Se dan los vectores $a = (-2,1,1)$, $b = (1,5,0)$, $c) (2,2,-1)$.
Calcúlese a) $Pr_b a$, b) $Pr_a b$, c) $Pr_{a+b} C$. d) $Pr_a(b+c)$,
e) $Pr_a(2b+c)$

a) $Proy_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{(-2,1,1)(1,5,0)}{|(1,5,0)|} = \frac{-2+5+0}{\sqrt{1^2+5^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$

b) $Proy_a b = \frac{a \cdot b}{|a|} = \frac{3}{|(-2,1,1)} = \frac{3}{\sqrt{-2^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$

c) $Proy_{a+b} C = \frac{(a+b)\cdot c}{|a+b|} = \frac{(-2,1,1)+(1,5,0) \cdot (2,2,-1)}{|(-2,1,1)+(1,5,0)|} = \frac{(-1,6,1)\cdot(2,2,-1)}{|(-1,6,1)|}$

$= \frac{-2+12-1}{\sqrt{-1^2+6^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{38}}$

d) $Pro\,(b+c) = \frac{a \cdot (b+c)}{|a|} = \frac{(-2,1,1)\cdot((1,5,0)+(2,2,-1))}{|(-2,1,1)|} = \frac{(-2,1,1)\cdot(3,7,-1)}{|(-2,1,1)|}$

$= \frac{+6+7-1}{\sqrt{-2^2+1^2+1^2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0$

e) $Pr_a(2b+c) = \frac{a\cdot(2b+c)}{|a|} = \frac{(-2,1,1)\cdot(2(1,5,0)+(2,2,-1))}{|(-2,1,1)|} = \frac{(-2,1,1)\cdot((2,10,0)+(2,2,-1))}{|(-2,1,1)|}$

$= \frac{(-2,1,1)\cdot(4,12,-1)}{\sqrt{-2^2+1^2+1^2}} = \frac{-8+12-1}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$

Nota: Al considerar la proyección escalar de un vector sobre otro se obtiene una interpretación geométrica del producto escalar.

El número $(a.b)/|b|$ se llama componente de a en la dirección de b y se denota por $Comp_b a$, es decir.

$$Comp_b a = \frac{(a\cdot b)}{|b|}$$

Si $Comp_b a > 0$ entonces $Proy_b a$ está en la dirección de b.
Si $Comp_b a < 0$ entonces $Proy_b a$ y b están en direcciones opuestas
Si $Comp_b a = 0$, entonces los vectores a y b son ortogonales

$Comp_b a = Proy_b a$

a) $Proy_b a = \frac{3}{\sqrt{26}}$ ∴ la $Proy_b a$ está en la dirección de b

b) $Proy_a b = \frac{3}{\sqrt{6}}$ ∴ la $Proy_a b$ está en la dirección de a

c) $Proy_{a+b} C = \frac{9}{\sqrt{38}}$ ∴ la $Proy_{a+b} C$ está en la dirección de a+b

d) $Proy_a(b+c) = 0$ ∴ los vectores a y (b+c) son ortogonales

e) $Proy_a(2b+c) = \frac{3}{\sqrt{6}}$ ∴ la $Proy_a(2b+c)$ está en la dirección de a.

1.57. Determínese si es derecha o izquierda la terna de los vectores a, b, c si:

a). $a = -i - j$, $b = j$; $c = k$

Nota: 3 vectores no coplanares a, b y c forman la terna derecha si después de ser reducidos al origen común el vector c está situado por el otro lado del plano que contiene los vectores a y b, de donde el giro más breve de a á b va en dirección contraria a las manecillas del reloj.

Producto mixto: $\begin{pmatrix} -i \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$[a;b;c] = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} -1 - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} 0$$

$$= -1$$

∴ a, b y c forma la terna izquierda porque el determinante es negativo

b). $a = i - j$; $b = j$, $c = i + j$.

Desarrollamos el producto de los 3 vectores.

$$[a;b;c] = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} -1 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} 0$$

$$= 0 - 0 + 0 = 0$$

Son coplanares, es decir a, b y c se encuentran en el mismo plano por lo que no forman ni una terna derecha ni una terna izquierda.

c). $a = i - j$, $b = i + j$, $c = k$.

Desarrollamos el producto de los 3 vectores

$$[a;b;c] = \begin{array}{c} \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} -1 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} 0$$

$$= 1 + 1 = 2$$

⇒ Como el determinante es positivo forman la terna derecha.

1.58 Hallése el vector $[a:b]$ y lepresentese si

a) $a = 2i$, $b = 3j$.

Cuando los vectores a y b están situados en el plano de los vectores i y j, la fórmula

$$[a;b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Se simplifica y entonces tenemos.

$$[a;b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k$$

$$[a:b] = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} k = 6k$$

b) $a = 3i - 2k$, $b = 4k$

Aplicando $[a:b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$$[a:b] = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k = -12j$$

c) $a = i + j + k$, $b = 2i - 3j + 4k$

Aplicando $[a:b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$[a:b] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} k$$

$$[a:b] = 7i - 2j - 5k$$

1.59. Hallése el área del paralelogramo construido sobre los vectores $a = (3,4)$ y $b = (4,-3)$

Nota: La longitud del vector $[\vec{a}.\vec{b}]$ es numericamente igual al área S del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir,

$$|[\vec{a}.\vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen}\,(\widehat{\vec{a}.\vec{b}})$$

El área S del paralelogramo situado en el plano y construido sobre los vectores $\vec{a} = a_x\vec{i}' + a_y\vec{j}'$ y $\vec{b} = b_x\vec{i}' + b_y\vec{j}'$ es igual a

$$S = |a_x b_y - a_y b_x|$$

De lo anterior, tenemos

$a = (3,4)$ $\quad$ $b = (4,-3)$

$a = (a_x, a_y)$ $\quad$ $b = (b_x, b_y)$

$$S = |3(-3) - 4(4)|$$
$$= |-9 - 16| = 25 \text{ unidades cuadradas}$$

Es decir el valor absoluto del determinante de $|[a:b]|$

$$|[a.b]| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 16 = |-25| = 25$$

1.61 Hállese el área del triángulo con los vértices en los puntos A (0,2,6), B(4,0,0) y C) (8,-2,0)

Nota: Para calcular el área del triángulo se puede hallar el producto vectorial de 2 vectores construidos sobre cualesquiera de sus lados y luego calcular la mitad de su longitud.

$$\vec{AB} = B - A = (4,0,0) - (0,2,6) = (4,-2,-6)$$
$$\vec{AC} = C - A = (8,-2,0) - (0,2,6) = (8,-4,-6)$$

El área del Δ ABC es igual a la mitad del área del paralelogramo construido sobre los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \right)^2 + \left(- \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)^2}$$

donde a_x a_y y a_z son: 4, -2 y -6
b_x, b_y y b_z son: 8, -4 y -6

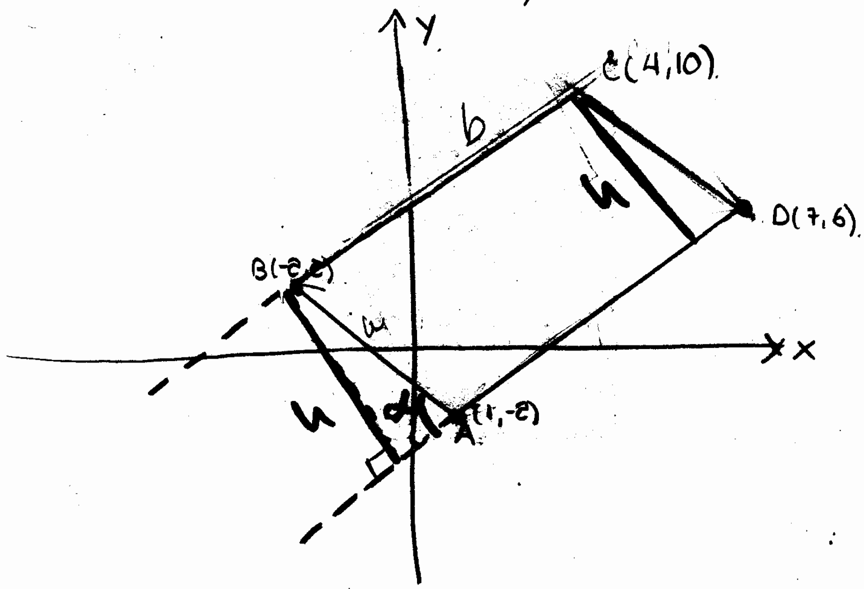
son las coordenadas de los vectores $\vec{a} = \vec{AB}$ y $\vec{b} = \vec{AC}$

De este modo, $$S_{ABC} = \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\left(\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(- \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + (0)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \, 26.83 = 13.41 \text{ unidades cuadradas}$$

1.62 Se dan los vértices del paralelogramo $A(1,-2)$, $B(-2,2)$, $C(4,10)$ y $D(7,6)$. Calcúlese su área y su altura.



Nota: Para calcular el área del paralelogramo se puede hallar el producto vectorial de dos vectores construidos sobre cualesquiera de sus lados adyacentes y luego, calcular su longitud.

Utilizando la fórmula: $[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$$AB = B-A = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = a$$

$$BC = C-B = \begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = b$$

Como en el ej 1.59 dado que ya calculamos los 2 vectores ahora podemos sacar el valor absoluto del determinante

$$|[a \cdot b]| = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -24-24 = |-48|$$ 48 unidades cuadradas es el área

Donde $|[\vec{a}\, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \operatorname{sen}(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$

$$\frac{|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \operatorname{sen}(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

$$\frac{\frac{|[\vec{a} : \vec{b}]|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}{|a|} = \frac{\frac{48}{5 \cdot 10}}{5} = \frac{48}{10} = 4.8 = \text{Altura} \Longrightarrow 4.8$$

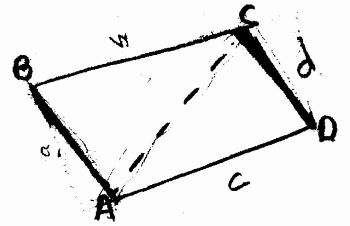
$$\frac{\frac{|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}{|b|} = \frac{\frac{48}{5 \cdot 10}}{10} = \frac{48}{5} = \text{Altura}\ 9.6$$

Demostración de que la figura formada por los vértices ABCD es un paralelogramo.

$A(1,-2)$, $B(-2,2)$, $C(4,10)$, $D(7,6)$

Cindy Olivares del Monte

Dados los vértices podemos calcular los.



$$AB = B-A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = a$$

$$BC = C-B = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = b$$

La diagonal es $b+a = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = AC$

$$AD = D-A = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = c$$

$$DC = C-D = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = d$$

La diagonal es $AD+DC = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Y como el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ es la diagonal del paralelogramo ABCD entonces

$$b+a = c+d$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ La figura anterior es un paralelogramo

1.70 Determínese si son coplanares los vectores $a = (8, 5, -13)$ $b = (-4, 2, 8)$, $c = (4, 7, -4)$ si son coplanares que terna formarían derecha o izquierda

Nota: Los vectores $a_1, a_2, \dots a_n$ se denominan coplanares si cada uno de ellos es paralelo a un mismo plano.

Para demostrar que los vectores son coplanares se tiene que cumplir que el producto mixto de 3 vectores es igual a cero

Suficiencia. Sea que los vectores a, b y c son coplanares. Entonces el vector $[a; b]$ es perpendicular al vector c, pero el producto escalar de los vectores perpendiculares es igual a cero, es decir $[a; b] \cdot c = (a; b, c) = 0$.

1. Cualesquiera que sean los vectores $a, b,$ y c son válidas las igualdades $(a; b; c) = (b; c; a) = (c; a; b)$.

Es decir, en caso de la permutación cíclica de los factores el producto mixto no varía.

$$(a; b, c) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{vmatrix} 8 & 5 & -13 \\ -4 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} 8 - \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} 5 + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} -13$$

$$= (-64)8 - (-16)5 + (-36)-13$$

$$= -512 + 80 + 468$$

$$= 36.$$

$$(b; c; a) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & 5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -13 \end{vmatrix} -4 - \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -13 \end{vmatrix} 2 + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} 8$$

$$= 284 + 40 + 288 = 36$$

$\therefore$ No son coplanares

Como el producto mixto es positivo entonces se formaría la terna derecha

1.71. Determínese si son coplanares los vectores $a=(-2,-1,-3)$ $b(-1,4,6)$ y $c=(1,5,9)$

Nota: Se tiene que cumplir que el producto mixto de 3 vectores es igual a cero si y sólo si los vectores son coplanares.

* Es decir, cualesquiera que sean los vectores a, b y c son válidos las igualdades

$$(a;b;c) = (b;c;a) = (c;a;b)$$

Producto mixto:

$$(a;b,c) = \begin{pmatrix} -2, & -1, & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} -2 - \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} -1 + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} -3$$

$$= -12 \quad -15 \quad +27 \quad = 0$$

$$(b;c;a) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} -1 - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} 4 + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} 6$$

$$= 6 \quad -60 \quad +54 = 60-60=0$$

$$(c;a;b) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} 1 - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} 5 + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} 9$$

$$= 6 \quad +75 \quad -81 \quad = 75-75=0$$

$\therefore$ Los vectores $a=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $c=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ son coplanares porque cumplen *