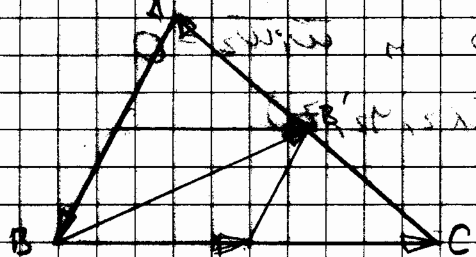
Cruz Rodríguez José Luis 29.10.04

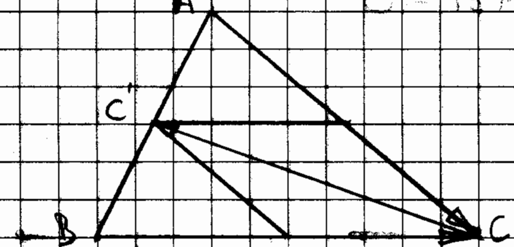
No. Cuenta: 40504458-3 Grupo: 4045

Demuestra que las medianas de un triángulo forman otro.



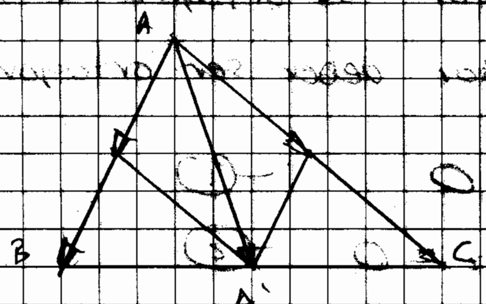
Tomemos la mediana $\vec{BB'}$ = compuesta la suma de los vectores $\frac{\vec{AB}}{2}$ y $\frac{\vec{BC}}{2}$

$$\vec{BB'} = -\frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{BC}}{2}$$



Para la mediana $\vec{CC'}$:

$$\vec{CC'} = -\frac{\vec{BC}}{2} - \frac{\vec{AC}}{2}$$



Para la mediana $\vec{AA'}$:

$$\vec{AA'} = \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AC}}{2}$$

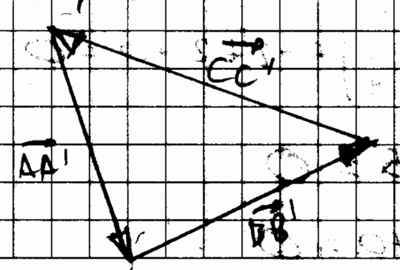
Entonces si sumamos las medianas tenemos que

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{AC}}{2} - \frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{BC}}{2} - \frac{\vec{BC}}{2} - \frac{\vec{AC}}{2}$$

$$= \left(\frac{\vec{AB}}{2} - \frac{\vec{AB}}{2}\right) + \left(\frac{\vec{AC}}{2} - \frac{\vec{AC}}{2}\right) + \left(\frac{\vec{BC}}{2} - \frac{\vec{BC}}{2}\right)$$

$$= 0$$

Entonces por la ley del polígono tenemos que la figura formada por $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$ y $\vec{CC'}$ es un polígono cerrado de tres lados, o sea un triángulo.



2.- Dado el vector $\vec{V}(-1,2,4)$, encuentre los vectores $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$ tales que:

$$\vec{w_1}\cdot\vec{V}=0,\quad \vec{w_2}\cdot\vec{V}=0 \quad y \quad \vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=0$$

Sea $\vec{w_1}=(x_1,y_1,z_1)$ y $\vec{w_2}=(x_2,y_2,z_2)$

Si $\vec{w_1}\cdot\vec{V}=0$, entonces:

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}=-x_1+2y_1+4z_1=0$$

Si hacemos que:

$z_1=0$
$y_1=1$
$\Rightarrow x_1=2y_1=2$, entonces un vector $\vec{w_1}$ ortogonal a $\vec{V}$ sería

$$\boxed{\vec{w_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}$$ y este vector deber ser ortogonal a $\vec{w_2}$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=2x_2+y_2+0=0 \quad (1)$$

y también

$$\vec{w_2}\cdot\vec{V}=-x_2+2y_2+4z_2=0 \quad (2)$$

de (1) tomamos que $y_2=-2x_2$

Sustituyendo en (2) $\quad -x_2+2(-2x_2)+4z_2=0$

$$-x_2-4x_2+4z_2=0$$
$$-5x_2=-4z_2$$

Si hacemos $z_2=\frac{5}{4}$, entonces:

$$x_2=\frac{-4z_2}{-5}=\frac{4}{5}\left(\frac{5}{4}\right)=1$$

y entonces $\quad y_2=-2x_2=-2(1)=-2$

$$\therefore\ \boxed{\vec{w_2}=\begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}}$$

Comprobación. $\vec{w_1}\cdot\vec{V_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}=-2+2+0=0$

$$\vec{w_2}\cdot\vec{V}=\begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}=-1-4+5=0$$

$$\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}=2-2+0=0$$

3.- Determine el producto cruz de los vectores

$\vec{V_1} = (1,2,3)$ y $\vec{V_2} = (-1,2,4)$

$$\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[(2)(4) - (3)(2)] - \hat{j}[(1)(4) - (-1)(3)] + \hat{k}[(1)(2) - (-1)(2)]$$

$$= \hat{i}(8-6) - \hat{j}(4+3) + \hat{k}(2+2)$$

$$= 2\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}$$

$\therefore$ $\vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$, este vector es ortogonal a $\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 14 + 12 = 14 - 14 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 - 14 + 16 = -16 + 16 = 0$$

Cruz Rodríguez José Luis 29.10.04

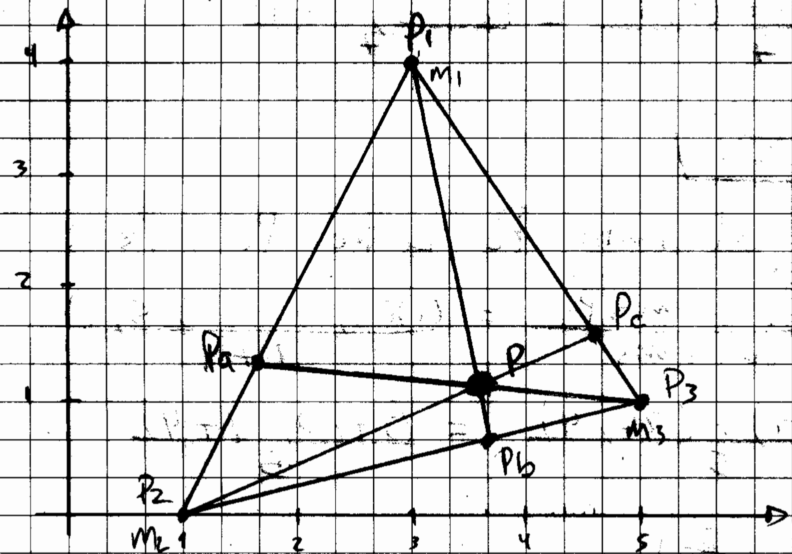
No. Cuenta: 40504958-3 Grupo: 4045

- Encontrar el centro de masas de tres puntos

$P_1 = (3,4)$, $m_1 = 1$

$P_2 = (1,0)$, $m_2 = 2$

$P_3 = (5,1)$, $m_3 = 4$



a) Tomando primero el punto P_a entre P_1 y P_2:

$$\vec{P_a} = \frac{m_1\vec{P_1} + m_2\vec{P_2}}{m_1+m_2} = \frac{(1)(3,4)+(2)(1,0)}{1+2}$$

$$= \frac{(3,4)+(2,0)}{3} = \frac{(3+2,4)}{3}$$

$$= \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Encontremos ahora $\vec{P}$ entre $\vec{Pa}$ y $\vec{P_3}$, con $m_a = m_1 + m_2 = 3$

$$\vec{P} = \frac{m_a\vec{P_a} + m_3\vec{P_3}}{m_a+m_3} = \frac{3\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)+4(5,1)}{3+4}$$

$$= \frac{(5,4)+(20,4)}{7} = \frac{(5+20, 4+4)}{7}$$

$$= \boxed{\left(\frac{25}{7}, \frac{8}{7}\right)}$$

b) Tomando primero el punto P_b entre P_2 y P_3:

$$\vec{P_b} = \frac{m_2\vec{P_2} + m_3\vec{P_3}}{m_2+m_3} = \frac{(2)(1,0)+(4)(5,1)}{2+4} = \frac{(2,0)+(20,4)}{6}$$

$$= \frac{(2+20, 4)}{6} = \left(\frac{22}{6}, \frac{4}{6}\right)$$

Encontremos ahora P entre P_b y P_1, con $m_b = m_2 + m_3 = 6$

$$\vec{P} = \frac{m_b \vec{P_b} + m_1 \vec{P_1}}{m_b + m_1} = \frac{(6)\left(\frac{22}{6}, \frac{4}{6}\right) + (1)(3,4)}{6+1}$$

$$= \frac{(22,4) + (3,4)}{7} = \frac{(22+3,\ 4+4)}{7}$$

$$= \boxed{\left(\frac{25}{7}, \frac{8}{7}\right)}$$

c) Tomando primero el punto P_c entre P_1 y P_3

$$\vec{P_c} = \frac{m_1 \vec{P_1} + m_3 \vec{P_3}}{m_1 + m_3} = \frac{(1)(3,4) + (4)(5,1)}{1+4}$$

$$= \frac{(3,4) + (20,4)}{5} = \frac{(3+20,\ 4+4)}{5}$$

$$= \left(\frac{23}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Encontremos ahora P entre P_c y P_2, con $m_c = m_1 + m_3 = 5$

$$\vec{P} = \frac{m_c \vec{P_c} + m_2 \vec{P_2}}{m_c + m_2} = \frac{(5)\left(\frac{23}{5}, \frac{8}{5}\right) + (2)(1,0)}{5+2}$$

$$= \frac{(23,8) + (2,0)}{7} = \frac{(23+2,\ 8)}{7}$$

$$= \boxed{\left(\frac{25}{7}, \frac{8}{7}\right)}$$