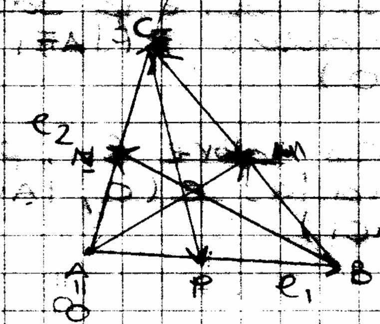
Vélez Mellado Patricia 25/oct/04

GEOMETRÍA ANALÍTICA

21. Se da el triángulo ABC. Tomando por base los vectores $e_1 = \vec{AB}$, $e_2 = \vec{AC}$ hállense las coordenadas de los vectores $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ y $\vec{CP}$ en esta base, donde los puntos M, N, P son los puntos medios de los lados BC, AC, AB del triángulo.



→ El punto B está sobre e_1, tiene coordenadas $B(|AB|, 0)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (|AB|, 0)$

→ El punto C tiene coordenadas $C(0, |AC|)$, considerando que está sobre la base

$\Rightarrow \vec{AC} = (0, |AC|)$

→ Coordenadas de $\vec{AM}$

Se tiene que $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$

Como $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (0, |AC|) - (|AB|, 0) =$

$= (-|AB|, |AC|)$

y M es el punto medio de $\vec{BC}$,

$$\vec{BM} = \frac{1}{2}(-|AB|, |AC|) = \left(-\frac{1}{2}|AB|, \frac{1}{2}|AC|\right)$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = (|AB|, 0) + \left(-\frac{1}{2}|AB|, \frac{1}{2}|AC|\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}|AB|, \frac{1}{2}|AC|\right)$$

→ Coordenadas de $\vec{BN}$

Se tiene que $\vec{BN} = \vec{AN} - \vec{AB}$

Como N es el punto medio de $\vec{AC}$,

$$\vec{AN} = 1/2\,(0, |AC|) = (0, 1/2\,|AC|)$$

$$\Rightarrow \vec{BN} = \vec{AN} - \vec{AB} = (0, 1/2\,|AC|) - (|AB|, 0)$$

$$= (-|AB|, 1/2\,|AC|)$$

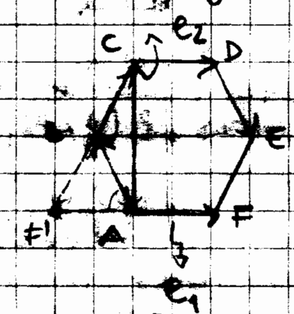
→ Coordenadas de $\vec{CP}$,

Se tiene que $\vec{CP} = \vec{AP} - \vec{AC}$

P es el punto medio de $\vec{AB}$, $\vec{AP} = 1/2\,(|AB|, 0) = (\frac{1}{2}|AB|, 0)$

$$\Rightarrow \vec{CP} = \left(\frac{1}{2}|AB|, 0\right) - (0, |AC|) = \left(\frac{1}{2}|AB|, -|AC|\right)$$

22. Se da el hexágono regular ABCDEF. Tomando por base los vectores $e_1 = \vec{AF}$, $e_2 = \vec{AC}$, hállense las coordenadas de los vectores: a) $\vec{AB}$; b) $\vec{BC}$; c) $\vec{CD}$; d) $\vec{DE}$; e) $\vec{EF}$; f) $\vec{AD}$; g) $\vec{AE}$; h) $\vec{FC}$; i) $\vec{DB}$; j) $\vec{BE}$.



• el punto F, está sobre la base, tiene coordenadas $F(|AF|, 0)$
$\Rightarrow \vec{AF} = (|AF|, 0)$

• el punto C esta sobre e_2, por lo que tiene coordenadas $C(0, |AC|)$
$\Rightarrow \vec{AC} = (0, |AC|)$

a) $\vec{AB}$

Se tiene que $\vec{AB} = (-\vec{AF}) + (-1/2(2\vec{CB}))$
(por que ABF' es equilatero, ABCDEF es un hexágono regular)

$2\vec{CB} = (-AF) + (-AC) = (-|AF|, 0) + (-0, -|AC|)$
$= (-|AF|, -|AC|)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (-|AF|, 0) + 1/2(-|AF|, +|AC|)$
$= (-1/2|AF|, 1/2|AC|)$

b) $\vec{BC}$

Se tiene que $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$
por (a) se sabe que $\vec{AB} = (-1/2|AF|, 1/2|AC|)$

$\Rightarrow \vec{BC} = (0, |AC|) - (-1/2|AF|, 1/2|AC|)$
$= (1/2|AF|, 1/2|AC|)$

c) $\vec{CD}$

Se observa que $\vec{CD} = \vec{AF}$, por lo que sus coordenadas en la base e_1, e_2 tiene las mismas coordenadas que $\vec{AF}$, i.e.,

$\vec{CD} = (|AF|, 0)$

d) $\vec{DE}$

$\vec{DE} = -\vec{AB}$
$\Rightarrow$ en las bases e_1 y e_2

$\vec{DE} = -(-1/2|AF|, 1/2|AC|)$

$= (1/2|AF|, -1/2|AC|)$

e) $\overrightarrow{EF}$

Se observa que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ en la base e_1 y e_2

$$\overrightarrow{EF} = -(1/2\,|AF|,\ 1/2\,|AC|) = (-1/2\,|AF|,\ -1/2\,|AC|)$$

f) $\overrightarrow{AD}$

Se tiene que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (|AF|, 0) + (0, |AC|) = (|AF|, |AC|)$$

g) $\overrightarrow{AE}$

Se tiene que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{EF}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = (|AF|, 0) - (-1/2\,|AF|,\ -1/2\,|AC|)$$
$$= (3/2\,|AF|,\ 1/2\,|AC|)$$

h) $\overrightarrow{FC}$

Se tiene que $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{FC} = (0, |AC|) - (|AF|, 0) = (-|AF|, |AC|)$$

i) $\overrightarrow{DB}$

Se observa que $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AE}$ (ABCDEF es un hexágono regular)

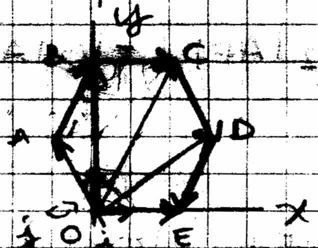
$$\Rightarrow \overrightarrow{DB} = -(3/2\,|AF|,\ 1/2\,|AC|) = (-3/2\,|AF|,\ -1/2\,|AC|)$$

j) $\overrightarrow{BE}$

Se tiene que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = (1/2\,|AF|,\ -1/2\,|AC|) - (-3/2\,|AF|,\ -1/2\,|AC|)$$
$$= (2\,|AF|,\ 0)$$

23. En el plano se da un hexágono regular. Desarróllense en vectores i y j todos los vectores representados en la figura, si $|\vec{OE}| = 4$



• $\vec{OE}$

Como i y $\vec{OE}$ son colineales

$OE = 4i$ y $OE = 0j$

$\Rightarrow \vec{OE} = 4i + 0j$

• $\vec{OA}$

$OA = \alpha i + \beta j$

α es la proyección ortogonal de $\vec{OA}$ sobre i

$\alpha = |OA| \cos 120° = 4 \cdot \cos 120° = -2$

β es la proyección ortogonal de $\vec{OA}$ sobre j

$\beta = |OA| \cos \theta = 4 \cos 30 = 2\sqrt{3}$

donde θ es el ángulo entre j y $\vec{OA}$.

Como ABCDEO es un hexágono regular $\measuredangle OAB = 120°$, y el $\triangle OAB$ es isósceles

$\Rightarrow 120 + 2\theta = 180°$

$\theta = 30°$

$OA = -2i + 2\sqrt{3}j$

• $\vec{AB}$

$\vec{AB} = \alpha i + \beta j$

α es la proyección ortogonal de $\vec{AB}$ sobre i

$\alpha = |AB| \cos 60° = 4 \cos 60° = 2$

$\beta = |AB| \cos \theta = 4 \cos 30 = 2\sqrt{3}$

donde θ es el ángulo entre j y $\vec{AB}$, $\theta = 30°$

$\vec{AB} = 2i + 2\sqrt{3}j$

• $\vec{BC}$;
Se observa que $\vec{BC} = \vec{OE}$

$\Rightarrow \vec{BC} = 4i + 0j$

• $\vec{CD}$
Se tiene que $\vec{CD} = \vec{OA}$

$\Rightarrow \vec{CD} = 2i - 2\sqrt{3}\,j$

• $\vec{DE}$
Se tiene que $\vec{DE} = -\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{DE} = -2i - 2\sqrt{3}\,j$

• $\vec{OD}$
$\vec{OD} = \alpha i + \beta j$

α es la proyección ortogonal de $\vec{OD}$ sobre i

$\alpha = |OD| \cos\theta = \sqrt{48} \cos 30 = 6$

Por la ley de los cosenos

$\cos 120 = \frac{4^2 + 4^2 - |OD|^2}{2 \cdot 4^2} = \frac{32 - |OD|}{32}$

$|OD|^2 = -32 \cos 120 + 32 = 48$
$|OD| = \sqrt{48}$
Como $\triangle OED$ es isósceles
$120 + 2\theta = 180$
$\theta = 30°$

β es la proyección ortogonal de OD sobre j

$\beta = |OD| \cos\omega = \sqrt{48} \cos 60 = \sqrt{48}/2 = \sqrt{12}$
Se observa que:
$90° = \measuredangle DOE + \omega = \theta + \omega = 30 + \omega$
$\omega = 60$

$\vec{OD} = 6i + \sqrt{12}\,j$

$\cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OC} = \alpha i + \beta j$

$\alpha = |OC| \cos \theta$

Del Δ OCD se tiene que $|OD| = \sqrt{48}$, $\measuredangle CDO = 90$

$\Rightarrow$ por la ley de los cosenos

$$\cos 90^\circ = \frac{4^2 + 48 - |OC|^2}{2(4)\sqrt{48}}$$

$|OC|^2 = 64$

$|OC| = 8$

luego para obtener θ

$$\cos\theta = \frac{|OC|^2 + |OD|^2 - |CD|^2}{2|OC||OD|} = \frac{64 + 48 - 16}{2\sqrt{48}\cdot 8}$$

$\theta = 30$

$\Rightarrow \alpha = 8\cos 30 = 4\sqrt{3}$

$\beta = |OC| \cos \omega$

Se observa que

$90 = 30 + \theta + \omega = 60 + \omega$

$\omega = 30$

$\Rightarrow \beta = 8 \cos 30 = 4\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OC} = 4\sqrt{3}\, i + 4\sqrt{3}\, j$

25. En un sistema cartesiano rectangular de coordenadas se dan los puntos A (3 ; -1 ; 2) y B (-1 , 2 , 2). Hállense las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$, sus longitudes y coordenadas del vector unitario, dirigido como el vector $\vec{BA}$.

• El vector $\vec{AB}$ resulta de $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Con $\vec{OB} = (-1, 2, 2)$ y $\vec{OA} = (3, -1, 2)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (-1,2,2) - (3,-1,2) = (-4, 3, 0)$

↳ Magnitud de $\vec{AB}$; $|\vec{AB}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

• El vector $\vec{BA}$ resulta de $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{BA} = (3, -1, 2) - (-1, 2, 2) = (4, -3, 0)$

↳ Magnitud de $\vec{BA}$; $|\vec{BA}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

↳ coordenadas del vector $\hat{u}$ dirigido como $\vec{BA}$

$$\hat{u} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \frac{1}{5}(4, -3, 0) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)$$

26. Se da el vector $a = 2i - 3j + 4k$. Hállese el vector b, si $|a| = |b|$, la abscisa del vector b es igual a la ordenada del vector a y la ordenada del vector b es igual a cero.

Se tiene que $a = (2, -3, 4)$,

$|a| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

luego $b = (-3, 0, z_b)$

y además se sabe que $|a| = |b|$

$\sqrt{29} = \sqrt{9 + z_b}$

$29 = 9 + z_b$

$20 = z_b$

$\Rightarrow b = (-3, 0, 20)$

27. Calcúlense las longitudes de las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $a = i + j$ y $b = k - 2j$.

Una de las diagonales es $a+b$, y además se tiene que

$a = (1, 1, 0)$ y $b = (0, -2, 1)$

$\Rightarrow a + b = (1, -1, 1)$

la magnitud de $|a+b|$ es,

$|a+b| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$

luego la segunda diagona es $a-b$,

$a - b = (1, 3, -1)$

la magnitud de $|a-b|$ es

$|a-b|^2 = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

1.28 Hállese la proyección del vector a sobre la dirección del vector b, y la proyección del vector b sobre la dirección del vector a, si

$|a| = 2$, $|b| = 1$, $\widehat{(a,b)} = 120°$

$Proy_b\, a = |a| \cos\widehat{(a,b)} = 2 \cos 120 = -1$

$Proy_a\, b = |b| \cos\widehat{(a,b)} = \cos 120 = -1/2$

29. Hallese el producto escalar de los vectores a y b, si $|a| = 4$, $|b| = 6$ y $\widehat{(a,b)}$ es igual a a) 45°; b) 0°; c) 135°; d) 90°; e) 180°

a) $a \cdot b = |a||b| \cos 45 = 24 \cdot (1/\sqrt{2}) = 24/\sqrt{2}$

b) $a \cdot b = |a||b| \cos 0° = 24$

c) $a \cdot b = |a||b| \cos 135° = -24/\sqrt{2}$

d) $a \cdot b = |a||b| \cos 90 = 0$

e) $a \cdot b = |a||b| \cos 180° = -24$

30. El ángulo entre los vectores a y b es igual a $120°$. Sabiendo que $|a| = 5$, $|b| = 4$, calcúlense a) $a \cdot b$; b) a^2; c) $(a-2b)\cdot(a+2b)$; d) $(a-b)^2$; e) $(7a+b)^2$.

a) $a\cdot b = |a||b|\cos 120° = -10$

b) $a^2 = a\cdot a = |a||a|\cos 0° = 25$

c) $(a-2b)\cdot(a+2b) = a^2 - 4b^2 = a\cdot a - 4(b\cdot b)$

$= 25 - 4(16) = -39$

d) $(a-b)^2 = a^2 - 2a\cdot b + b^2 = a\cdot a - 2a\cdot b + b\cdot b$

$= 25 + 20 + 16 = 61$

e) $(7a+b)^2 = 49a^2 + 14a\cdot b + b^2 = 1101$

31. Calcúlense

a) $i\cdot(j+k) + j\cdot(3i+k) + k\cdot(i+2j)$

$= i\cdot j + i\cdot k + j\cdot 3i + j\cdot k + k\cdot i + 2j\cdot k = 0$

b) $i\cdot(i+j+k) + j\cdot(i+j+k) + k\cdot(i+j+k)$

$= i\cdot i + i\cdot j + i\cdot k + j\cdot i + j\cdot j + j\cdot k + k\cdot i + k\cdot j + k\cdot k = 3$

32. Calcúlense $a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a$, si $a+b+c = 0$ y $|a| = |b| = |c| = 1$

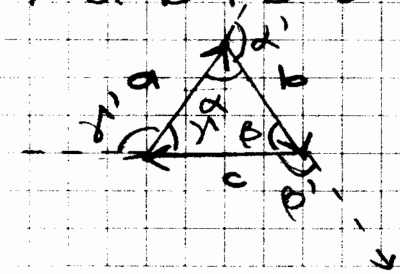
Se observa que a, b y c forman un Δ equilátero de lado 1, (cumplen la regla del cierre)

$\Rightarrow a\cdot b = |a||b|\cos\alpha' = \cos 120° = -1/2$

$b\cdot c = |b||c|\cos\beta' = \cos 120° = -1/2$

$c\cdot a = |c||a|\cos\gamma' = \cos 120° = -1/2$

$\Rightarrow a\cdot b + b\cdot c + c\cdot a = -3/2$



33. Se dan los vectores $a = (4, -2, 0)$ y $b = (1, 2, 3)$. Calcúlense

a) $a \cdot b$

$a \cdot b = (4, -2, 0) \cdot (1, 2, 3) = 4 - 4 + 0 = 0$

b) $b^2 = (1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 1 + 4 + 9 = 14$

c) $(a - b)^2$

$(a - b) = (4, -2, 0) - (1, 2, 3) = (3, -4, -3)$

$(a - b)^2 = (3, -4, -3) \cdot (3, -4, -3) = 9 + 16 + 9 = 34$

d) $(3a - b) \cdot (2a + 3b)$

$3a = (12, -6, 0)$; $2a = (8, -4, 0)$; $3b = (3, 6, 9)$

$3a - b = (11, -8, -3)$; $2a + 3b = (11, 2, 9)$

$(3a - b) \cdot (2a + 3b) = 121 - 16 - 27 = 88$

34. Se da el vector $a = (3, -4)$. Hállense las coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector a.

Cualquier vector $\perp$ a a cumple

$$a \cdot b = 0$$

luego ~~los vectores~~ b y $-b$ satisfacen la condición anterior

$\Rightarrow$ Tomemos $b = (4, 3)$ y $-b = (-4, -3)$ los vectores unitarios perpendiculares a a son

$b / |b|$ y $-b / |-b|$

$|b| = |-b| = \sqrt{25} = 5$

$b / |b| = (4/5, 3/5)$; $-b / |b| = (-4/5, -3/5)$

1.35. Se da el vector $c = (4, -7)$. Hállense las coordenadas de cualquier vector $\perp$ a c. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

Encontrar vector a ; $a \cdot c = 0$

$a = (7, 4)$

El problema tiene una infinidad de soluciones, tantas como vectores colineales a a, es decir cualquier αa ó $-\alpha a$ es $\perp$ a c.

36. Se da el vector $a = (1, 2, -3)$. Se sabe que la abscisa del vector perpendicular a éste es igual a 3 y la ordenada es igual a 6, se requiere hallar la z-coordenada del vector b.

Tenemos que

$a \cdot b = 0$

con $b = (3, 6, z_b)$

$\Rightarrow (1, 2, -3) \cdot (3, 6, z_b) = 3 + 12 - 3z_b = 0$

$z_b = 5$

$b = (3, 6, 5)$

37. Se da el vector $a =$ ~~(4,-6,-3)~~ $(3, -4)$. Se sabe que la abscisa del vector b perpendicular a éste es igual a 8, y la ordenada es igual a y_b, determínese y_b.

Se tiene que $a \cdot b = 0$

con $b = (8, y_b)$

$\Rightarrow (3, -4) \cdot (8, y_b) = 24 - 4y_b = 0$

$y_b = 6$

$b = (8, 6)$

38. Se halla el vector $a = (5, 3)$. Se sabe que la ordenada del vector b perpendicular a éste es igual a 10; determínese la abscisa del vector b.

Como $a \perp b$, $a \cdot b = 0$

con $b = (x_b, 10)$

$(5, 3) \cdot (x_b, 10) = 5x_b + 30 = 0$

$x_b = -6$

$b = (-6, 10)$

39. Hállese el valor α con el cual los sig. vectores son $\perp$ entre sí

a) $a = \alpha i + 3j + 4k$ y $b = 4i + \alpha j - 7k$

$a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$

i.e. $(\alpha, 3, 4) \cdot (4, \alpha, -7) = 4\alpha + 3\alpha - 28 = 0$

$\Rightarrow 7\alpha = 28$

$\alpha = 4$

$\boxed{\alpha = 4}$

b) $a = (\alpha, -3, 2)$ y $b = (1, 2, -\alpha)$

$a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$

$(\alpha, -3, 2) \cdot (1, 2, -\alpha) = \alpha - 6 - 2\alpha = 0$

$= -\alpha - 6 = 0$

$\alpha = -6$

c) $a = (0, -2, 7)$ y $b = (\alpha, 14, 4)$

$a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$

$\alpha = 0$

b) $a = (-1, 2, 2)$, ; $b \cdot a = -2$ ⟹

⟹ ~~Si b es~~ colineal a a ⟹ $b = \alpha a$

y además

$$(-1, 2, 2) \cdot (-\alpha, 2\alpha, 2\alpha) = -2$$

$$\alpha + 4\alpha + 4\alpha = -2$$

$$9\alpha = -2$$

$$\alpha = -2/9$$

$$b = (2/9, -4/9, -4/9)$$

44. Hállese el vector b, cuya longitud es igual a 50, que es colineal al vector a y forma un ángulo agudo con el eje dado:

a) $a = 2i - 3j - 6k$, eje Ox;

Como b ~~forma~~ un ángulo agudo con Ox, se tiene que

$$0 < b \cdot i < 50$$

⟹ Tomemos $b \cdot i = 4$

Como b es colineal a a, $b = \alpha a$

$$(2\alpha, -3\alpha, -6\alpha) \cdot (1, 0, 0) = 4$$

$$2\alpha = 4$$

$$\alpha = 2$$

entonces existe al menos un vector colineal a $(4, -6, -12)$ tal que su norma sea 50, es decir,

$$50 = \sqrt{(4\beta)^2 + (-6\beta)^2 + (-12\beta)^2}$$

$$2500 = 16\beta^2 + 36\beta^2 + 144\beta^2$$

$$\frac{625}{49} = \beta^2$$

$$\pm\frac{25}{7} = \beta$$

Con $\beta = 25/7$

$$b = (100/7, -150/7, -300/7)$$

44) $a = (6, -8, -7.5)$; eje Oz

Como b forma un ángulo agudo con Oz,

$0 < b \cdot k < 50$

Considerar $b \cdot k = 7.5$

Como b es colineal a a $b = \alpha a$

$(6\alpha, -8\alpha, -7.5\alpha) \cdot (0, 0, 1) = 7.5$

$-7.5\alpha = 7.5$

$\alpha = -1$

entonces existe al menos un vector colineal a $c = (-6, 8, 7.5)$ tal que su norma sea 50

$50 = \sqrt{36\beta^2 + 64\beta^2 + 56.25\beta^2}$

$2500 = 156.25\beta^2$

$16 = \beta^2$

$\beta = \pm 4$

Con $\beta = 4$, $b = (-24, 32, 30)$

45. Se dan tres vectores: $a = (2, -1, 3)$, $b = (1, -3, 2)$, $c = (3, 2, -4)$. Hállese el vector x que satisfaga $x \cdot a = -5$, $x \cdot b = -11$, $x \cdot c = 20$

Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$

$x \cdot a = 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5$

$x \cdot b = x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$

$x \cdot c = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 20$

Resolviendo el sistema se obtienen la componentes de x

$-5x_1 - 7x_3 = 4$

$7x_1 + 2x_3 = 10$

$-10x_1 - 14x_3 = 8$

$49x_1 + 14x_3 = 70$

$39x_1 = 78$

$x_1 = 2$

$14 + 2x_3 = 10$

$2x_3 = -4$

$x_3 = -2$

$2 - 3x_2 - 4 = -11$

$-3x_2 = -9$

$x_2 = 3$

$\boxed{x = (2, 3, -2)}$

46. Hállese el coseno del ángulo entre el vector $a = (3, -4)$ y el eje Ox

El producto punto $a \cdot i$ es

$(3, -4) \cdot (1, 0) = 3$

pero se sabe que $a \cdot i = |a| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre a e i, es decir, el $\measuredangle$ entre a y el eje Ox

$|a| = \sqrt{9+16} = 5$

$\Rightarrow a \cdot i = 3 = 5\cos\theta$, de aquí

$$\boxed{\cos\theta = \frac{3}{5}}$$

47. Hállense los cosenos de los ángulos entre el vector $a = (3, -4, 12)$ y los ejes de coordenadas

$\rightsquigarrow$ cos $\measuredangle$ entre a y Ox

$a \cdot i = (3, -4, 12) \cdot (1, 0, 0) = 3$

$a \cdot i = |a| \cos \widehat{ai}$

$|a| = \sqrt{9+16+144} = 13$

el ángulo $\widehat{ai}$ es el ángulo entre a y Ox

$a \cdot i = 3 = 13 \cos \widehat{ai}$

$$\cos \widehat{ai} = 3/13$$

$\rightsquigarrow$ cos $\measuredangle$ entre a y Oy

$a \cdot j = (3, -4, 12) \cdot (0, 1, 0) = -4$

$a \cdot j = |a| \cos \widehat{aj}$

el $\measuredangle$ $\widehat{aj}$ es el ángulo entra a y Oy

$a \cdot j = -4 = 13 \cos \widehat{aj}$

$$\cos \widehat{aj} = -4/13$$

~~un coseno entre~~ de ~~a~~ Oz

$a \cdot k = (3, -4, 12) \cdot (0, 0, 1) = 12$

$a \cdot k = |a| \cos \widehat{ak}$

$\measuredangle$ entre a y Oz es el ángulo entre a y k

$a \cdot k = 12 = 13 \cos \widehat{ak}$

$\cos \widehat{ak} = 12/13$

48. Hállese el ángulo entre ~~las~~ las diagonales de un paralelogramo construido sobre los vectores $a = 2i + j$ y $b = -j + 2k$

Las diagonales del paralelogramo son

- $a + b = (2, 1, 0) + (0, -1, 2) = (2, 0, 2)$
- $a - b = (2, 1, 0) - (0, -1, 2) = (2, 2, -2)$

Las diagonales ~~se~~ intersectan en el punto medio de cada una,

$1/2(a+b) \cdot 1/2(a-b) = (1, 0, 1) \cdot (1, 1, -1) = 1 - 1 = 0$

Como el producto punto de las diagonales es 0, éstas son perpendiculares, por lo que el ángulo entre ellas es 90°.

49. Determínense el ángulo entre el vector $a =$ ~~1/3/1/1~~ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y el eje de las abscisas, si $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $C(5, 3)$ y $D(10, 5)$.

Se tiene que, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 8) - (-2, 3)$
$= (2, 5)$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (10, 5) - (5, 3) = (5, 2)$

$\Rightarrow \vec{a} = (2, 5) + (5, 2) = (7, 7)$

luego para obtener el $\measuredangle$ entre a y Oy

$a \cdot j = (7, 7) \cdot (0, 1) = 7$

$a \cdot j = |a| \cos \theta$

$|a| = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98}$

$\Rightarrow a \cdot j = 7 = \sqrt{98} \cos \theta$

$\cos \theta = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\theta = 45°}$

50. Determínese el ángulo entre los vectores:
a) i y $j+k$; b) j e $i-k$; c) k y $2j-3k$

a) i y $j+k$

$j + k = (0,1,0) + (0,0,1) = (0,1,1)$

$\Rightarrow i \cdot (j+k) = (1,0,0) \cdot (0,1,1) = 0$

$\therefore$ el ángulo entre i y $j+k$ es $90°$

b) j e $i-k$

Por la propiedad distributiva

$j \cdot (i-k) = j \cdot i - j \cdot k$

$j \cdot i = (0,1,0) \cdot (1,0,0) = 0$

$j \cdot k = (0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$

$\Rightarrow j \cdot (i-k) = 0$

$\therefore$ el ángulo entre estos vectores es $90°$

c) k y $2j - 3k$

$k \cdot (2j - 3k) = (k \cdot 2j) - (k \cdot 3k)$

$k \cdot 2j = (0,0,1) \cdot (0,2,0) = 0$

$k \cdot 3j = (0,0,1) \cdot (0,3,0) = 0$

$\Rightarrow k \cdot (2j - 3k) = 0 \quad \therefore$ el ángulo entre ellos es $90°$

51. Determínense las magnitudes de los ángulos en el Δ con los vértices $A(5,0,0)$, $B(1,1,1)$ y $C(3,-1,2)$

→ Determinar el ∡ entre los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$

- El vector CB está dado por $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$,

$CB = (1,1,1) - (3,-1,2) = (-2,2,-1)$

→ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (5,0,0) - (3,-1,2)$

$= (2,1,-2)$

luego $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = (-2,2,-1) \cdot (2,1,-2) = -4+2+2 = 0$

el ∡ entre $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$ es $90°$

→ Determinar ∡ entre $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = (2,-2,1)$; y

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (5,0,0) - (1,1,1) = (4,-1,-1)$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = (2,-2,1) \cdot (4,-1,-1) = 8+2-1 = 9$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = |BC||BA| \cos\theta$

$|BC| = \sqrt{9} = 3$; $\overrightarrow{BA} = \sqrt{18}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 9 = (3)(\sqrt{18}) \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{9}{3 \cdot \sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\theta = 45°$

→ Angulo entre $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = (-2,-1,2)$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = (-4,1,1)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2,-1,2) \cdot (-4,1,1) = 8-1+2 = 9$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |AC||AB| \cos\omega$

$|AB| = \sqrt{18}$; $|AC| = \sqrt{9} = 3$

$$\cos\omega = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\omega = 45°$