**Capítulo II**

# RECTAS EN EL PLANO

## § 26. Ecuaciones con dos variables y su gráfico

Se denomina solución de la ecuación con dos variables cualquier par ordenado de valores de las variables que reduce dicha ecuación a una igualdad exacta.

Por ejemplo, el par ordenado de los números (4; —5) (en el cual, en el primer lugar está escrito el valor de la variable $x$, y en el segundo, el valor de la variable $y$) es la solución de la ecuación $3x + 2y - 2 = 0$, ya que $3\cdot 4 + 2\cdot(-5) - 2 = 0$. El par de números (—5; 4) no es la solución de la ecuación dada, ya que $3\cdot(-5) + 2\cdot 4 - 2 \neq 0$.

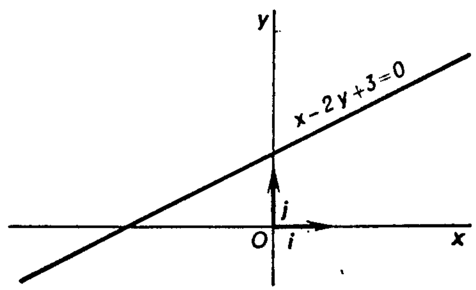



Fig. 71

Si elegimos arbitrariamente los valores $x$ y hallamos de la ecuación los valores $y$ que corresponden a ellos, se puede obtener un conjunto de pares de números que serán las soluciones de esta ecuación. Tales pares de valores de las variables $x$ e $y$ se puede considerar como coordenadas de los puntos en el plano. El conjunto de los puntos construidos según estas coordenadas se denomina *gráfico* de la ecuación dada.



Así pues, el gráfico de las ecuaciones con dos variables es el conjunto de todos los puntos, cuyas coordenadas sirven de soluciones de esta ecuación.

Por ejemplo, expresando $y$ por $x$ de la ecuación $x - 2y + 3 = 0$ obtendremos

$$y = \frac{1}{2}(x+3).$$

Se sabe que el gráfico de esta función es una recta. Por consiguiente, el gráfico de la ecuación $x - 2y + 3 = 0$ es la misma recta (fig. 71).

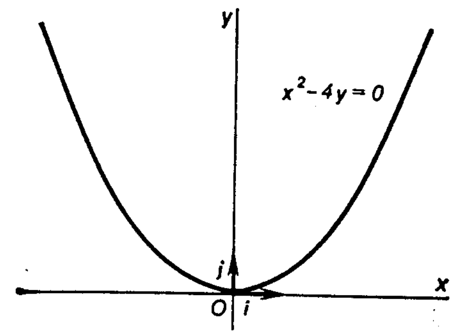



Fig. 72

Exactamente igual, expresando $y$ mediante $x$, de la ecuación $x^2 - 4y = 0$ obtendremos

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Por consiguiente, el gráfico de la ecuación $x^2 - 4y = 0$ es la parábola (fig. 72).

## § 27. Ecuaciones canónicas y paramétricas de la recta

La posición de una recta en el plano puede ser definida del modo siguiente:

1) la recta $l$ pasa por el punto $M_0$ paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$. El punto $M_0$ se denomina a veces punto inicial (fig. 73, *a*);

2) la recta $l$ pasa por los puntos $M_1$ y $M_2$ (fig. 73, *b*);

3) la recta $l$ pasa por el punto $M_0$ perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ (fig. 73, *c*);

4) la recta $l$ atraviesa el punto $M_0$ y forma con el vector $i$ (fig. 73, d) el ángulo $\varphi$.

Se denomina *vector director* de la recta $l$, cualquier vector $a \neq 0$, paralelo a esta recta.

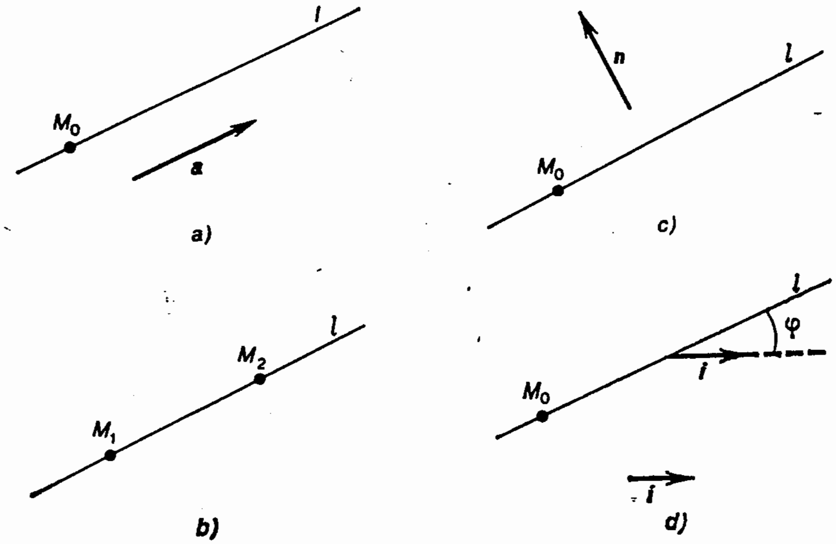



Fig. 73

De esta definición se deduce que cada recta tiene cuantos quiera vectores directores y todos ellos son colineales entre sí (fig. 74).

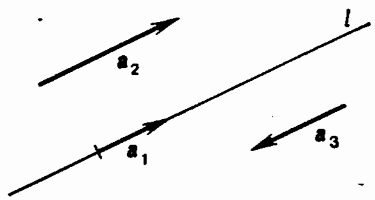



Fig. 74

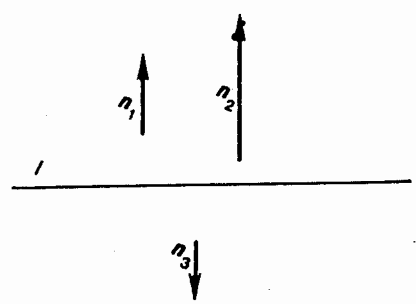



Fig. 75

Se denomina *vector normal* de la recta cualquier vector $n \neq 0$ perpendicular a la recta $l$.

De esta definición se deduce que cada recta tiene cuantos quiera vectores normales y todos ellos son colineales entre sí (fig. 75).



Si en la recta $l$ tomamos dos puntos fijados cualesquiera $M_1$ y $M_2$, el vector $\overrightarrow{M_1M_2}$ será el vector director de la recta $M_1M_2$. Señalemos que por vector director se puede tomar también el vector $\overrightarrow{M_2M_1}$, ya que $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_2M_1}$ y, en general, cualquier vector $k \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$, donde $k \neq 0$.

Supongamos que la recta $l$ está definida por el punto inicial $M_0$ y por el vector director $a$ (fig. 76). Sea que $M$ es cualquier punto; designemos su radio vector por $r$. El vector $\overrightarrow{M_0M} = r - r_0$ es paralelo a la recta cuando y sólo cuando el punto $M$ está situado en esta recta. En este caso, el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es colineal al vector $a$. Por consiguiente, $\overrightarrow{M_0M} = ta$, o

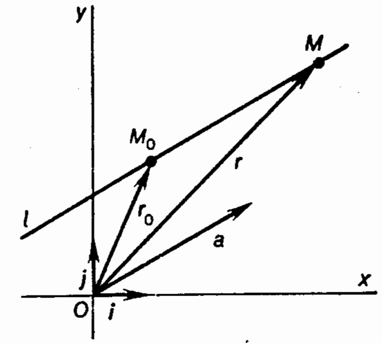



Fig. 76

$$r - r_0 = ta. \tag{1}$$

La variable $t$ en la fórmula (1) que toma distintos parámetros numéricos, se denomina *parámetro*, y la ecuación (1) se denomina *ecuación vectorial paramétrica* de la recta $l$.

Si designamos las coordenadas de los puntos $M$ y $M_0$ con $(x;\ y)$ y $(x_0;\ y_0)$, y las coordenadas del vector $a$ con $(a_1;\ a_2)$, la ecuación (1) puede escribirse en coordenadas:

$$x \cdot i + y \cdot j = (x_0 \cdot i + y_0 \cdot j) + t\,(a_1 \cdot i + a_2 \cdot j)$$

o

$$x \cdot i + y \cdot j = (x_0 + a_1 t) \cdot i + (y_0 + a_2 t) \cdot j.$$

De aquí se deduce que

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases} \tag{2}$$

La ecuación (2) se denomina *ecuación paramétrica de la recta*.

**Problema 1.** Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $M_0$ (3; —5) paralelamente al vector $a = (4;\ 1)$.

△ Sustituyendo directamente las coordenadas del punto $M_0$ y las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ en la ecuación (2) obtendremos

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -5 + t. \end{cases} \blacktriangle$$

**Problema 2.** La recta $l$ está definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -2 + 6t. \end{cases}$$

Se requiere construir esta recta.

△ Para construir la recta hallemos dos puntos. Para determinar sus coordenadas hace falta tomar dos valores cualesquiera del parámetro $t$ y sustituirlos en la ecuación de la recta. Si $t = 0$ obtenemos el punto $M_0$ (5; —2), y si $t = 1$, el punto $M_1$ (3; 4). Luego construimos los puntos $M_0$ y $M_1$ y (valiéndose de una regla) trazamos la recta buscada (fig. 77). ▲

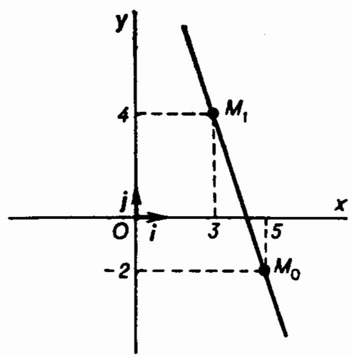



Fig. 77

Eliminemos el parámetro $t$ de la ecuación (2). Esto es posible, ya que el vector $\boldsymbol{a} \neq 0$ y, por lo tanto, por lo menos una de sus coordenadas es diferente de cero.

Sea que $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, entonces

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \tag{3}$$

La ecuación (3) se denomina *ecuación canónica de la recta* con el vector director $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$.

Si $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, las ecuaciones (2) toman la forma

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$$



Estas ecuaciones definen la recta paralela al eje $Oy$ que pasa por el punto $M_0 (x_0; y_0)$. La ecuación canónica de tal recta tiene la forma

$$x = x_0. \tag{4}$$

Si $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ las ecuaciones (2) tomarán la forma

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen la recta que es paralela al eje $Ox$ y pasa por el punto $M_0 (x_0; y_0)$. La ecuación canónica de tal recta tiene la forma

$$y = y_0. \tag{5}$$

**Problema 3.** Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto $M_0$ (—1; 1) y es paralela al vector $\boldsymbol{a} = (2; 3)$.

△ Poniendo las coordenadas del punto $M_0$ y las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ en la ecuación (3), obtendremos

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 1}{3}. \blacktriangle$$

**Problema 4.** Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto $M_0$ (3; 4) paralelamente al vector $\boldsymbol{a} = (0; 5)$.

△ Según la fórmula (4) se tiene $x = 3$. ▲

## § 28. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados

Sea que se dan dos puntos $M_1$ y $M_2$ con las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. Para formar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M_1$ y $M_2$ tomemos por vector director de esta recta el vector $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

La ecuación canónica de la recta (27) que pasa por el punto $M_1 (x_1; y_1)$ y tiene el vector director $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2)$ tiene la forma

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}.$$

Al sustituir en esta ecuación las coordenadas del vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, obtendremos

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (1)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de una recta que pasa por dos puntos*.

Si en la ecuación (1) uno de los denominadores se anula, para obtener una ecuación hay que igualar a cero el nominador respectivo.

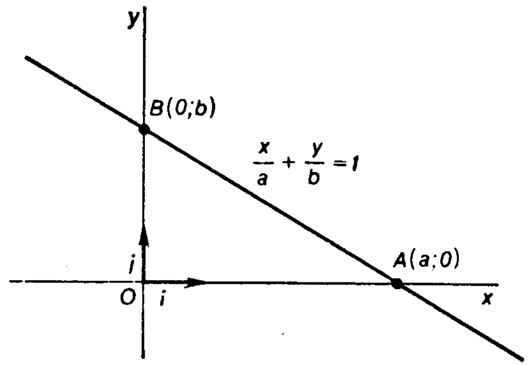



Fig. 78

Por ejemplo, si $x_2 - x_1 = 0$, la ecuación buscada será $x - x_1 = 0$. En este caso, los puntos $M_1$ y $M_2$ se encuentran a la misma distancia del eje $Oy$, y la recta $M_1M_2$ es paralela a este eje.

Frecuentemente se necesita formar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, uno de los cuales está situado en el eje $Ox$ y el otro, en el eje $Oy$.

Sea que en los ejes de coordenadas se dan los puntos $A$ $(a;\ 0)$ y $B$ $(0;\ b)$, y sea que $a \neq 0$, $b \neq 0$ (fig. 78). Considerando que en la fórmula (1) $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$, obtenemos

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$$

ó

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación segmentaria de una recta*, ya que los números $a$ y $b$ indican, qué segmentos son cortados por la recta en los ejes de coordenadas.



**Problema 1.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $M_1$ $(3;\ -2)$ y $M_2$ $(5;\ 1)$.

△ Una vez sustituidas las coordenadas de los puntos $M_1$ y $M_2$ en la ecuación (1) obtendremos

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y+2}{1+2}$$

ó $3x - 2y - 13 = 0$.▲

**Problema 2.** Los vértices de un triángulo se encuentran en los puntos $A$ $(-3;\ 2)$, $B$ $(1;\ 5)$ y $C$ $(5;\ -7)$. Escríbase la ecuación de la mediana de este triángulo que pasa a través del vértice $A$. Constrúyanse el triángulo y la mediana.

△ Sea que el punto $A_1$ $(x_1;\ y_1)$ es el punto medio del lado $BC$. Para hallar sus coordenadas utilicemos las fórmulas de división de un segmento por la mitad (el § 25 las fórmulas (5)):

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3,$$

$$y_1 = \frac{5-7}{2} = -1.$$

Poniendo ahora en la fórmula (1) $x_1 = 3$; $y_1 = -1$, $x_2 = -3$, $y_2 = 2$, obtendremos la ecuación de la recta $AA_1$, es decir, la ecuación buscada de la mediana,

$$\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y+1}{2+1} \quad \text{ó} \quad x + 2y - 1 = 0.$$

En la figura 79 está representado el triángulo $ABC$ y la mediana $AA_1$. ▲

**Problema 3.** Escríbase la ecuación segmentaria de la recta $y = \frac{3}{4}x - 3$. Calcúlese el área del triángulo formado por esta recta y los ejes de coordenadas.

△ Transformemos la ecuación dada del modo siguiente:

$$\frac{3}{4}x - y = 3, \quad \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1.$$

Como resultado obtendremos la ecuación

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1,$$

que es la ecuación segmentaria de la recta dada.

El triángulo formado por la recta dada y los ejes de coordenadas es un triángulo rectangular con los catetos iguales a 4 y 3 (fig. 80), por lo tanto, su área es igual a $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = 6$ (unidades cuadradas). ▲

**Problema 4.** Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $A$ (4; —3) de manera que el área del triángulo

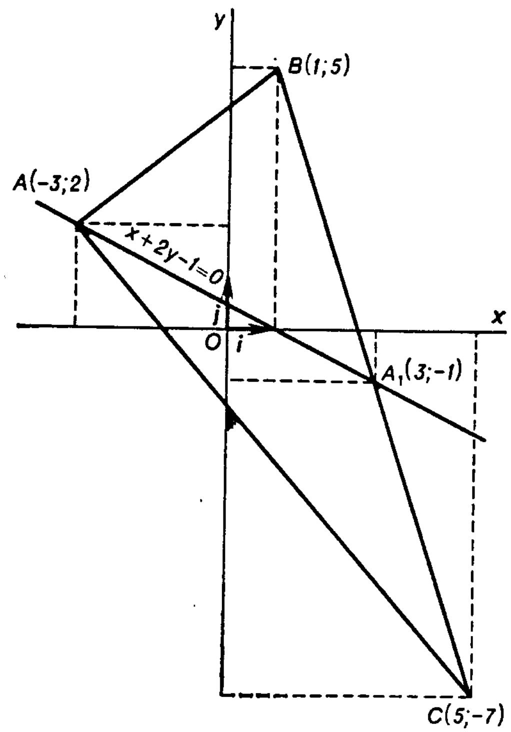



Fig. 79

formado por esta recta y los ejes de coordenadas sea igual a 3 unidades cuadradas.

△ Apliquemos la ecuación segmentaria de una recta. Sea que $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ es la ecuación de la recta buscada. Entonces, como el punto $A$ (4; —3) está situado en la recta, $a$ y $b$ satisfacen la ecuación

$$\frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1$$

ó

$$4b-3a=ab.$$



El área del triángulo formado por esta recta y los ejes de coordenadas es, evidentemente, igual a $\frac{1}{2}|a|\cdot|b|$, por lo tanto, $a$ y $b$ también satisfacen la ecuación

$$|a|\cdot|b|=6.$$

Por consiguiente, para hallar la ecuación de una recta es suficiente resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4b-3a=ab, \\ |ab|=6. \end{cases}$$

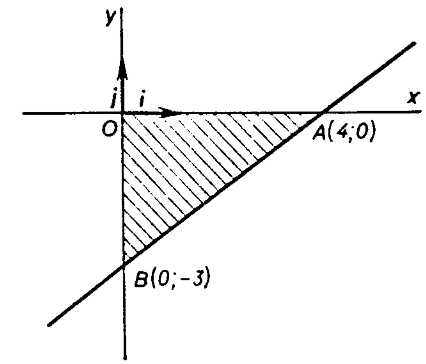



Fig. 80

El sistema de ecuaciones obtenido es, evidentemente, equivalente a los dos sistemas de ecuaciones simples siguientes:

$$\begin{cases} 4b-3a=6, \\ ab=6 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4b-3a=-6 \\ ab=-6. \end{cases}$$

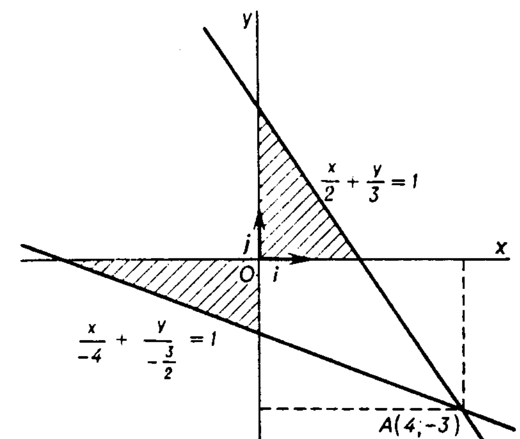



Fig. 81

Del primer sistema hallamos $a_1=2$, $b_1=3$ y $a_2=-4$, $b_2=-\frac{3}{2}$; el segundo sistema no tiene soluciones. Así pues, el problema tiene dos soluciones (fig. 81)

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$$

ó

$$3x + 2y - 6 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + 8y + 12 = 0. \ \blacktriangle$$

## § 29. Ecuación de una recta que pasa por el punto dado perpendicularmente al vector dado

Sea que se da cierto punto $M_0$ y el vector $\boldsymbol{n}$. Tracemos por el punto $M_0$ la recta $l$ perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ (fig. 82). Sea que $M$ es un punto arbitrario. El punto $M$

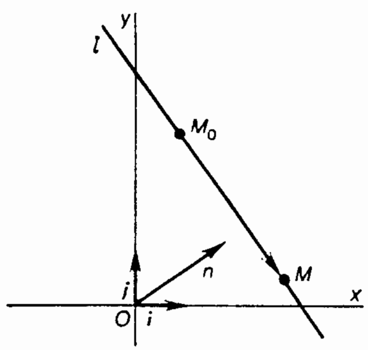



Fig. 82

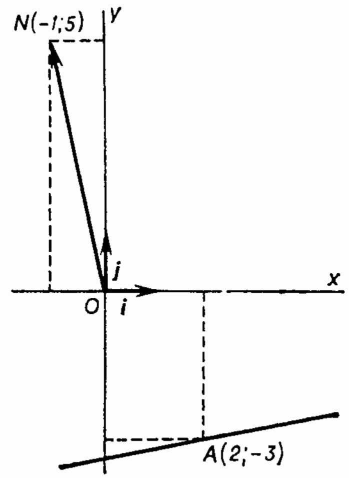



Fig. 83

está situado en la recta $l$ cuando, y sólo cuando el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$, para lo cual es necesario y suficiente que el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{n}$ y $\overrightarrow{M_0M}$ sea igual a cero:

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0. \qquad (1)$$

Para expresar la última igualdad en coordenadas introduzcamos un sistema cartesiano rectangular de coordenadas.



Sea que los puntos $M_0$ y $M$ tienen las coordenadas $(x_0;\ y_0)$ y $(x;\ y)$. Entonces, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0)$. Designemos

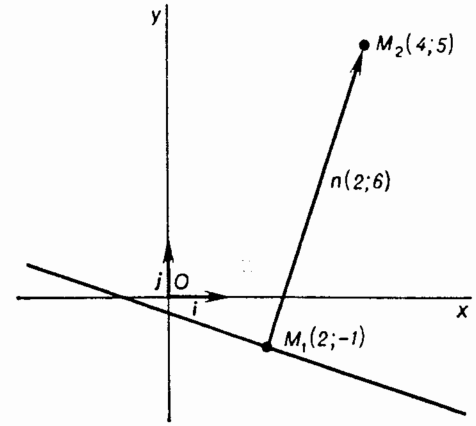



Fig. 84

las coordenadas del vector normal $\boldsymbol{n}$ por $(A;\ B)$. Ahora se puede escribir la igualdad (1) así:

$$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (2) *es la ecuación de la recta $l$ que pasa por el punto dado $M_0\ (x_0,\ y_0)$ perpendicularmente al vector dado* $\boldsymbol{n} = (A;\ B)$.

**Problema 1.** Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $A$ (2; —3) perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ = (—1; 5) (fig. 83).

△ Aplicando la fórmula (2), hallamos la ecuación de la recta dada:

$$-1\cdot(x - 2) + 5\cdot(y + 3) = 0$$

o, definitivamente, $x - 5y - 17 = 0$. ▲

**Problema 2.** Se dan los puntos $M_1$ (2; —1) y $M_2$ (4; 5). Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $M_1$ perpendicularmente al vector $\overrightarrow{M_1M_2}$.

△ El vector normal de la recta buscada $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$ tiene las coordenadas (2; 6) (fig. 84). Por consiguiente, según la fórmula (2) obtendremos la ecuación

$$2\ (x - 2) + 6\ (y + 1) = 0$$

ó $x + 3y + 1 = 0$. ▲

**Problema 3.** En el triángulo con los vértices en los puntos $M_1(-5;\ 2)$, $M_2(5;\ 6)$ y $M_3(1;\ -2)$ está trazada la mediana $M_1A_1$. **Se requiere escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $A_1$ perpendicularmente a la mediana $M_1A_1$ (fig. 85).**

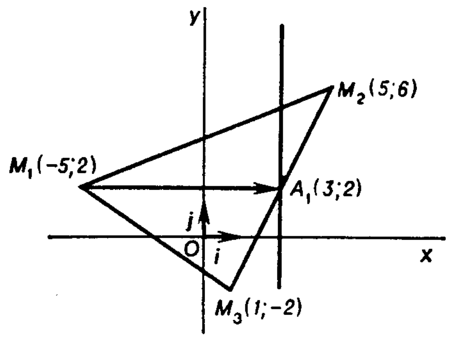



Fig. 85

$\triangle$ Se puede tomar por vector normal de la recta buscada el vector $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1A_1}$. Determinemos sus coordenadas. El punto $A_1$ es el punto medio del segmento $M_2M_3$, por lo tanto, si $(x_1;\ y_1)$ son sus coordenadas, $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, e $y_1 = \frac{6-2}{2} = 2$. Entonces el vector normal $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1A_1}$ tiene las coordenadas $(8;\ 0)$. Por consiguiente, la ecuación

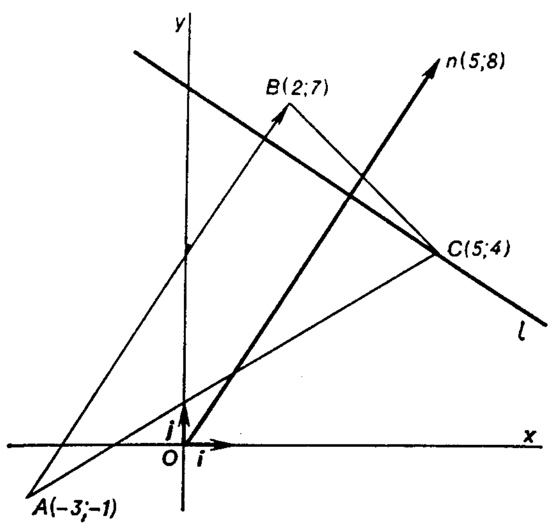



Fig. 86

buscada de la recta tiene la forma

$$8(x-3) + 0(y-2) = 0 \quad \text{ó} \quad x = 3. \quad \blacktriangle$$



**Problema 4.** Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A(-3;\ -1)$, $B(2;\ 7)$ y $C(5;\ 4)$. Se requiere formar la ecuación de la recta que pasa por el vértice $C$ perpendicularmente al lado $AB$ (fig. 86).

$\triangle$ Por vector normal de la recta buscada se puede tomar el vector $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB}$. Puesto que $\boldsymbol{n} = (2-(-3);\ 7-(-1)) = (5;\ 8)$, sustituyendo las coordenadas del punto $C$ y las coordenadas del vector $\boldsymbol{n}$ en la fórmula (2), obtendremos

$$5(x-5) + 8(y-4) = 0.$$

o, definitivamente, $5x + 8y - 57 = 0$. $\blacktriangle$

## § 30. Ecuación general de una recta

Sea que se da una recta arbitraria. Elijamos en ésta un cierto punto $M_0(x_0;\ y_0)$ y supongamos que $\boldsymbol{n} = (A;\ B)$ es un vector normal arbitrario de esta recta. Entonces (ver 29) la ecuación de esta recta será la ecuación

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$$

Escribámosla así:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0.$$

Al designar con $C$ el número $-(Ax_0 + By_0)$, obtendremos

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Así pues, toda recta del plano se define por la ecuación (1), es decir, por una ecuación lineal con dos variables.

Demostremos ahora que toda ecuación lineal es la ecuación de una recta.

En efecto, en la ecuación (1) por lo menos uno de los coeficientes $A$ o $B$ es diferente de cero, en caso contrario esta ecuación no será lineal. Sea que, por ejemplo, $B \neq 0$, entonces la ecuación (1) puede ser escrita en la forma

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0. \qquad (2)$$

De acuerdo con el párrafo anterior la ecuación (2) y, por consiguiente, la ecuación (1) definen la recta que pasa por el punto $\left(0;\ -\frac{C}{B}\right)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n} = (A;\ B)$.

La ecuación $Ax + By + C = 0$ se denomina ***ecuación general de la recta.***

Señalemos que en la ecuación $Ax + By + C = 0$ el coeficiente $A$, cuando $x$ es una variable, es la primera coordenada del vector normal de la recta y el coeficiente $B$, cuando $y$ es una variable, es la segunda coordenada del vector normal de la recta.

**Problema 1.** Señalar los vectores normales para las rectas definidas por las ecuaciones:

$$3x - 4y + 5 = 0, \quad y = \frac{2}{5}x + 17, \quad x = 5.$$

△ El vector normal de la primera recta es el vector $\boldsymbol{n} = (3;\ -4)$, de la segunda, el vector $\boldsymbol{n} = \left(\frac{2}{5};\ -1\right)$, de la tercera, el vector $\boldsymbol{n} = (1;\ 0)$. ▲

Examinemos, cómo se sitúa la recta respecto al sistema de coordenadas en función de los valores $A$, $B$, $C$ de la ecuación general de la recta.

1. Si en la ecuación general de la recta $A = 0$, la ecuación puede escribirse en la forma $By + C = 0$ o $y = -\frac{C}{B}$.

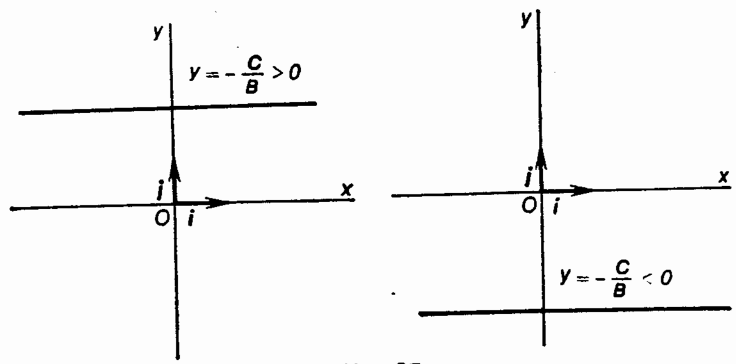



Fig. 87

Esto significa que todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada $\left(-\frac{C}{B}\right)$. Por consiguiente, la recta es paralela al eje $Ox$ (fig. 87).

Si $A = 0$ y $C = 0$, la ecuación toma la forma $y = 0$, es decir, es la ecuación del eje $Ox$.

2. Si en la ecuación (1) $B = 0$, la ecuación de la recta puede escribirse en la forma $Ax + C = 0$ ó $x = -\frac{C}{A}$.



Esto quiere decir que todos los puntos de la recta tienen la misma abscisa $\left(-\frac{C}{A}\right)$. Por consiguiente, la recta es paralela al eje $Oy$ (fig. 88).

Si $B = 0$ y $C = 0$, la ecuación toma la forma $x = 0$, es decir, es la ecuación del eje $Oy$.

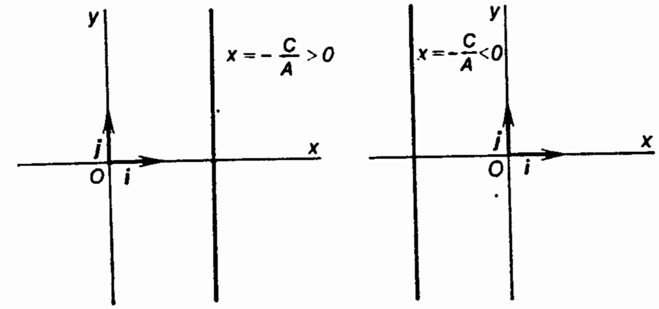



Fig. 88

3. Si $C = 0$, la ecuación (1) toma la forma $Ax + By = 0$. Las coordenadas del punto $O$ (0; 0) satisfacen esta ecuación y, por consiguiente, la recta $l$ definida por esta ecuación pasa por el origen de coordenadas (fig. 89).

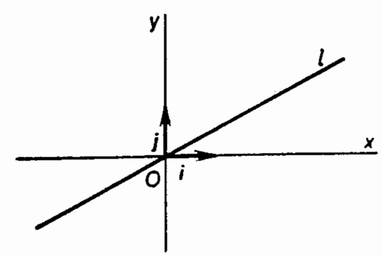



Fig. 89

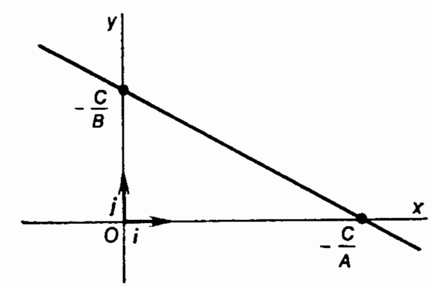



Fig. 90

4. Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$, la recta no es paralela ni al eje $Ox$, ni al eje $Oy$ y no pasa por el origen de coordenadas (fig. 90). En este caso la ecuación (1) se reduce al tipo de ecuación segmentaria: $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$, y, por consiguiente, la recta definida por la ecuación (1) pasa por los puntos $\left(-\frac{C}{A};\ 0\right)$ y $\left(0;\ -\frac{C}{B}\right)$.

**Problema 2.** ¿Cómo están situadas las rectas: a) $x - y = 0$; b) $x + y = 0$; c) $3x - 12 = 0$; d) $5y + 20 = 0$; e) $3x + 4y = 0$? Constrúyanse estas rectas.

△ a) Puesto que la ecuación de la recta no contiene un término independiente, la recta pasa por el origen de coordenadas. Como para cualquier punto de la recta la abscisa es igual a la ordenada, la recta es la bisectriz del primero y tercero ángulos de coordenadas (fig. 91).

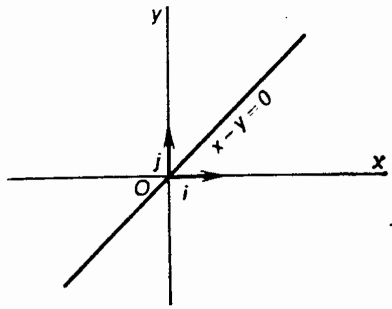


Fig. 91

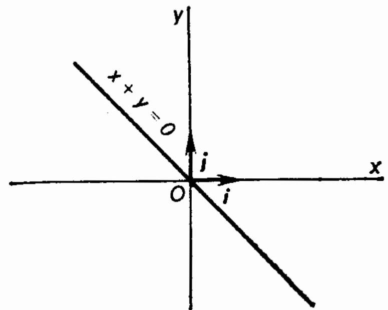


Fig. 92

b) La ecuación de la recta no contiene un término independiente, por consiguiente, la recta pasa por el origen de coordenadas. Puesto que para cada punto la abscisa y ordenada son iguales en valor absoluto, pero tienen los signos contrarios, esta recta es la bisectriz del segundo y cuarto ángulos de coordenadas (fig. 92).

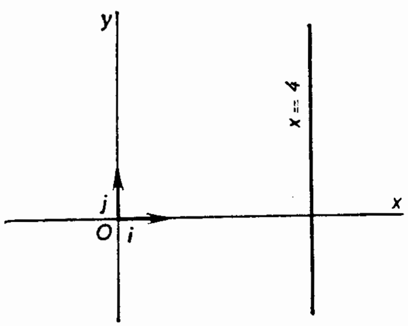
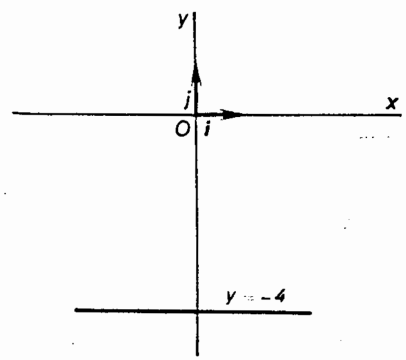


Fig. 93



Figs 94



c) Realizadas las simplificaciones la ecuación de esta recta será la ecuación $x = 4$. La recta es paralela al eje de las ordenadas y pasa por el punto (4; 0) (fig. 93).

d) La ecuación de esta recta puede escribirse en la forma $y = -4$. La recta es paralela al eje de las abscisas y pasa por el punto (0; —4) (fig. 94).

e) Puesto que en la ecuación está ausente el término independiente, la recta pasa por el origen de coordenadas. Para construir tal recta, es necesario hallar las coordenadas de cualquier otro punto más. Por ejemplo, sea que $x = 4$, entonces de la ecuación se deduce que para este punto $y = -3$. Tracemos la recta a través del origen de coordenadas $O$ (0; 0) y por el punto (4; —3) (fig. 95). ▲

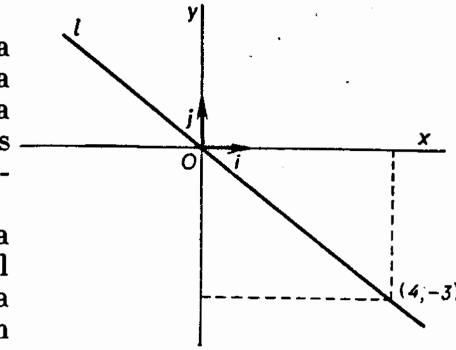


Fig. 95

## § 31. Ecuación de una recta con un coeficiente angular

Sea que en un plano que contiene un sistema cartesiano rectangular de coordenadas la recta $l$ pasa por el punto $M_0$

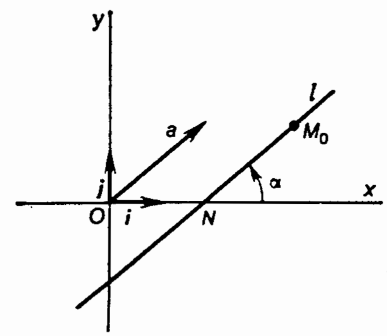


Fig. 96

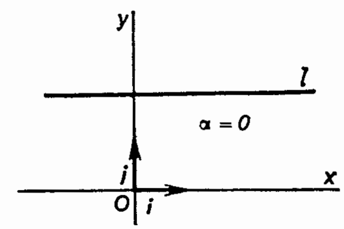


Fig. 97

paralelamente al vector director $\boldsymbol{a}$ (fig. 96). Si la recta $l$ corta el eje $Ox$ (en el punto $N$), por ángulo entre la recta $l$ y el eje $Ox$ se entenderá el ángulo $\alpha$, en el que es necesario girar el eje $Ox$ en torno al punto $N$ en sentido antihorario, para que el eje $Ox$ coincida con la recta $l$. (Se tiene en cuenta un ángulo menor de 180°.) Este ángulo se denomina *ángulo de inclinación* de la recta. Si la recta $l$ es paralela al eje $Ox$, el ángulo de inclinación se toma igual a cero (fig. 97).

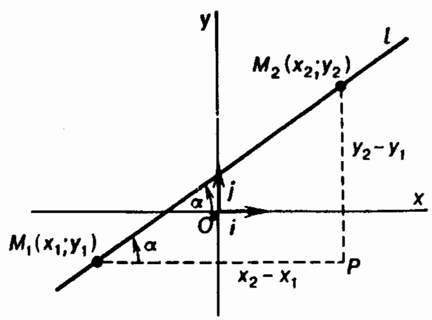


Fig. 98

La tangente del ángulo de inclinación de una recta se denomina *coeficiente angular* y se designa habitualmente con la letra $k$:

$$\operatorname{tg}\alpha = k.$$

Si $\alpha = 0$, también $k = 0$; esto significa que la recta es paralela al eje $Ox$ y su coeficiente angular es igual a cero.

Si $\alpha = 90°$, entonces $k = \operatorname{tg}\alpha$ no tiene sentido: esto quiere decir que la recta es perpendicular al eje $Ox$ (es decir, es paralela al eje $Oy$) y no tiene un coeficiente angular.

El coeficiente angular de una recta puede ser calculado, si son conocidas las coordenadas de dos puntos cualesquiera de esta recta. Sean dados dos puntos de la recta: $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$ y supongamos que, por ejemplo, $0 < \alpha < 90°$ y $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$ (fig. 98). Entonces del triángulo rectangular $M_1PM_2$ hallemos $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{|M_2P|}{|M_1P|} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Así pues,

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

Análogamente se demuestra que la fórmula (2) es válida en el caso de $90° < \alpha < 180°$.

La fórmula (2) pierde la validez, si $x_2 - x_1 = 0$, es decir, si la recta $l$ es paralela al eje $Oy$. Para tales rectas el coeficiente angular no existe.

**Problema 1.** Determínese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos $M_1(3;\ -5)$ y $M_2(5;\ -7)$.

△ Sustituyendo las coordenadas de los puntos $M_1$ y $M_2$ en la fórmula (2), obtendremos

$$k = \frac{-7-(-5)}{5-3} \quad \text{ó} \quad k = -1. \ \blacktriangle$$



**Problema 2.** Determínese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos $M_1(3;\ 5)$ y $M_2(3;\ -2)$.

△ Puesto que $x_2 - x_1 = 0$, la igualdad (2) pierde la validez. Para esta recta no existe un coeficiente angular. La recta $M_1M_2$ es paralela al eje $Oy$. ▲

**Problema 3.** Determínese el coeficiente angular de la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $M_1(3;\ -5)$.

△ En este caso el punto $M_2$ coincide con el origen de coordenadas. Aplicando la fórmula (2), obtendremos

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-5)}{0-3} = -\frac{5}{3};\ k = -\frac{5}{3}. \ \blacktriangle$$

Escribamos la ecuación de la recta con el coeficiente angular $k$ que pasa por el punto $M_1(x_1;\ y_1)$. Según la fórmula (2) el coeficiente angular de una recta se halla por las coordenadas de sus dos puntos. En nuestro caso el punto $M_1$ está dado, y por segundo punto se puede tomar un punto cualquiera $M(x;\ y)$ de la recta buscada.

Si el punto $M$ está situado en la recta que pasa por el punto $M_1$ y tiene el coeficiente angular $k$, en virtud de la fórmula (2) se tiene

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = k. \tag{3}$$

Si el punto $M$ no está situado en la recta, la igualdad (3) no es válida. Por consiguiente, la igualdad (3) es la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_1(x_1;\ y_1)$ con el coeficiente angular $k$; esta ecuación se escribe habitualmente en la forma

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4}$$

Si la recta corta el eje $Oy$ en cierto punto $(0;\ b)$, la ecuación (4) toma la forma

$$y - b = k(x - 0)$$

es decir,

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Esta ecuación se denomina ***ecuación de la recta con el coeficiente angular k y con la ordenada inicial b.***

**Problema 4.** Hállese el ángulo de inclinación de la recta $\sqrt{3}x + 3y - 7 = 0$.

△ Reduzcamos la ecuación dada a la forma

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{7}{3}.$$

Por consiguiente, $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, de aquí que $\alpha = 150°$. ▲

**Problema 5.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\ (3;\ -4)$ con un coeficiente angular $k = \frac{2}{5}$.

△ Al sustituir $k = \frac{2}{5}$, $x_1 = 3$, $y_1 = -4$ en la ecuación (4), obtendremos

$$y - (-4) = \frac{2}{5}(x-3) \quad \text{ó} \quad 2x - 5y - 26 = 0. \ ▲$$

**Problema 6.** Hágase la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q\ (-3;\ 4)$ y que forma el ángulo de 30° con la dirección positiva del eje $Ox$.

△ Si $\alpha = 30°$, $k = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Al sustituir los valores de $x_1$, $y_1$ y $k$ en la ecuación (4), obtendremos

$$y - 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+3) \quad \text{ó} \quad \sqrt{3}\,x - 3y + 12 + 3\sqrt{3} = 0. \ ▲$$

## § 32. Cálculo del ángulo entre las rectas, definidas por ecuaciones generales. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas

Sea que las rectas $l_1$ y $l_2$ están definidas por las ecuaciones generales

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Designemos con $\varphi$ la magnitud del ángulo entre las rectas $l_1$ y $l_2$ y con $\psi$, el ángulo entre los vectores normales $\boldsymbol{n}_1 = (A_1;\ B_1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (A_2;\ B_2)$ de estas rectas. Si $\psi \leqslant 90°$ (fig. 99, *a*), $\varphi = \psi$. Si $\psi > 90°$ (fig. 99, *b*), entonces $\varphi = 180° - \psi$. Es fácil ver que en cualquier caso es válida la igualdad

$$\cos\varphi = |\cos\psi|.$$



De acuerdo con la fórmula (1) del 20 tenemos

$$\cos\psi = \cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2}) = \frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$$

y, por consiguiente, el coseno del ángulo $\varphi$ entre las rectas $l_1$ y $l_2$ puede ser calculado según la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}. \tag{1}$$

Al escribir el miembro derecho de la fórmula (1) por medio de las coordenadas obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 + A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2} + \sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{2}$$

**Problema 1.** Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$-3x - 4y + 25 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 3y - 25 = 0.$$

△ Según la fórmula (2) obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{|-3\cdot4 - 4\cdot3|}{\sqrt{3^2+4^2}\ \sqrt{4^2+3^2}} = \frac{24}{25},$$

de donde según la tabla de los cosenos hallamos $\varphi \approx 16°$. ▲

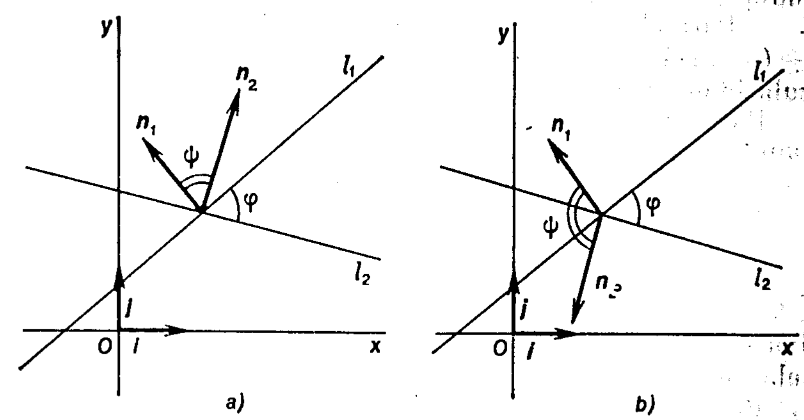



Fig. 99

Las rectas con los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$:

a) son paralelas cuando, y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son colineales;

b) son perpendiculares cuando, y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son perpendiculares, o sea, cuando $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas definidas por las ecuaciones generales.

Para que las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

sean:

a) paralelas, es necesario y suficiente que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0;$$

b) perpendiculares, es necesario y suficiente que

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

**Problema 2.** Entre los siguientes pares de rectas:

$$\begin{aligned} 6x - 15y + 7 &= 0 \quad \text{y} \quad 10x + 4x - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 4 &= 0 \quad \text{y} \quad 3x + 2y - 13 = 0 \\ x - 2y + 1 &= 0 \quad \text{y} \quad 2x - 4y + 1 = 0 \end{aligned}$$

indíquense las paralelas o las perpendiculares.

△ Para el primer par de rectas $A_1A_2 + B_1B_2 = 6 \cdot 10 + (-15) \cdot 4 = 0$, es decir, es válida la condición de perpendicularidad. Las rectas son perpendiculares.

Para el segundo par de rectas

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y}$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 \neq 0.$$

Por consiguiente, las rectas del segundo par no son ni paralelas ni perpendiculares.

Para el tercer par de rectas

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, las rectas son paralelas.▲



Si las rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (3)$$

tienen un punto común, sus coordenadas satisfacen cualquiera de las ecuaciones (3). Por lo tanto, para hallar los puntos comunes de las rectas dadas es necesario resolver el sistema

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + B_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Si las rectas (3) no son paralelas, es decir, si $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ellas se cortan. Las coordenadas del punto de intersección se hallan del sistema (4) que en este caso tiene una solución única.

Si las rectas (2) son paralelas, es decir, si $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = 0$, ellas o bien coinciden y, entonces, el sistema (4) tiene un conjunto infinito de soluciones (las coordenadas de cada punto de la recta son la solución del sistema) o bien no coinciden y, entonces, el sistema (4) no tiene soluciones.

## § 33. Cálculo del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares

Sea que las rectas $l_1$ y $l_2$ están dadas por las ecuaciones con coeficientes angulares $k_1$ y $k_2$:

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{e} \quad y = k_2x + b_2.$$

Por vectores normales de estas rectas se puede tomar $\boldsymbol{n}_1 = (k_1; -1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (k_2; -1)$. La fórmula (2) del § 32 en este caso tiene la forma

$$\cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2+1} + \sqrt{k_2^2+1}}. \qquad (1)$$

Po medio de esta fórmula se puede hallar el ángulo $\varphi$ entre las rectas con coeficientes angulares $k_1$ y $k_2$.

Si $k_1 = k_2$, $\cos\varphi = 1$ y $\varphi = 0$, es decir, las rectas son paralelas.

Si $k_1k_2 + 1 = 0$, $\cos\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$, es decir, las rectas son perpendiculares.

Por consiguiente, las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares se enuncian de la manera siguiente:

para que las rectas $y = k_1x + b_1$ e $y = k_2x + b_2$ sean

a) paralelas, es necesario y suficiente que $k_1 = k_2$;

b) perpendiculares, es necesario y suficiente que $k_1k_2 = -1$.

Deduzcamos una fórmula más (más simple) para el ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones con coeficientes angulares.

Puesto que $0 \leqslant \varphi \leqslant 90°$, $\operatorname{sen}\varphi \geqslant 0$ y

$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}.$$

Al sustituir la expresión para $\cos\varphi$ de la fórmula (1), obtendremos

$$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{1-\frac{(k_1k_2+1)^2}{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}} = \frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{k_1^2+1}+\sqrt{k_2^2+1}}.$$

De aquí y de la fórmula (1) se deduce que para la tangente del ángulo entre las rectas con coeficientes angulares $k_1$ y $k_2$ queda válida la fórmula

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1-k_2}{k_1k_2+1}\right|. \qquad (2)$$

Si el denominador en la fórmula (2) se anula, es decir, si $k_1k_2 + 1 = 0$, entonces, como se ha indicado anteriormente, las rectas son perpendiculares y $\varphi = 90°$.

**Problema 1.** Hállese el ángulo entre las rectas $y = -\frac{x}{7} + 2$ e $y = \frac{3}{4}x + 5$.

△ Según la fórmula (2), considerando que $k_1 = -\frac{1}{7}$, $k_2 = \frac{3}{4}$, hallamos

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{7}-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}+1}\right| = 1.$$



El ángulo entre las rectas es igual a 45°. ▲

**Problema 2.** Calcúlese el ángulo entre las rectas $y = -\frac{x}{4} + 1$ e $y = 8x + 7$.

△ Considerando que en la fórmula (2) $k_1 = -\frac{1}{4}$, $k_2 = 8$, obtenemos

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{4}-8}{-\frac{1}{4}\cdot 8+1}\right| = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

Según la tabla de las tangentes hallamos $\varphi \approx 83°$. ▲

**Problema 3.** Demuéstrese que las rectas $y = -\frac{x}{3} - 3$ e $y = 3x - 1$ son perpendiculares.

△ Comprobemos si se cumple la condición de perpendicularidad de las rectas:

$$k_1k_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3 = -1.$$

Por consiguiente, las rectas son perpendiculares. ▲

## § 34 *. Cálculo del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones canónicas

Examinemos el problema de cálculo del ángulo entre las rectas $l_1$ y $l_2$ definidas en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas por las ecuaciones

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} \quad y \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2}.$$

Designemos con $\varphi$ la magnitud del ángulo entre las rectas $l_1$ y $l_2$, y con $\psi$, la magnitud del ángulo entre los vectores directores $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1;\ b_2)$ de estas rectas. Es fácil ver que si $\psi \leqslant 90°$ (fig. 100, *a*), $\varphi = \psi$, y si $\psi > 90°$ (fig. 100, *b*), $\varphi = 180° - \psi$. Por lo tanto, siempre tiene lugar la igualdad

$$\cos\varphi = |\cos\psi|.$$

Según la fórmula (1) del § 20 obtenemos

$$\cos\psi = \cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

y, por consiguiente,

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

o

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1+a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \qquad (1)$$

**Problema 1.** Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}$$

y construyamos estas rectas.

△ Según la fórmula (1) hallamos

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot3-5\cdot3|}{\sqrt{1^2+5^2}\,\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\,\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las rectas es igual a 45°.

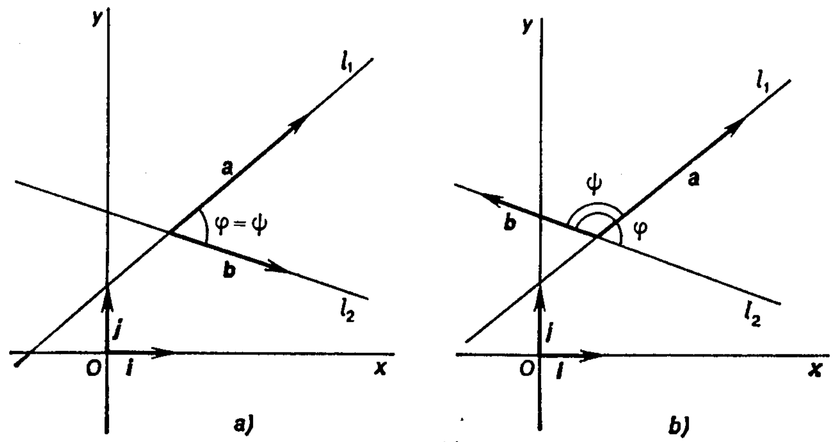



Fig. 100

Construir una recta es más fácil por dos puntos. De lao ecuaciones se ve que la primera recta pasa por el punta (1; —3) y la segunda, por el punto (0; —1). La primera recta corta el eje $Ox$ en el punto $\left(\frac{8}{5};\ 0\right)$ y la segunda, en el punto $\left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$. Las rectas dadas están representadas en la figura 101. ▲

Las rectas con los vectores directores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

a) son paralelas, cuando los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales;

b) son perpendiculares, cuando los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares, es decir, cuando $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas definidas por las ecuaciones canónicas.

Para que las rectas

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}$$

$$\text{y} \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}$$

sean

a) paralelas, es necesario y suficiente que

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0;$$

b) perpendiculares, es necesario y suficiente que

$$a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 = 0.$$

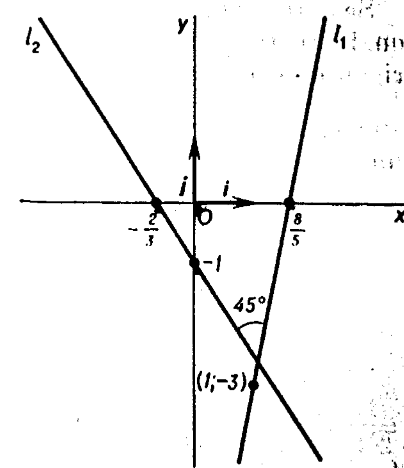



Fig. 101

**Problema 2.** Entre los siguientes pares de rectas indíquense los pares de rectas paralelas o perpendiculares:

$$\frac{x-7}{3}=\frac{x}{6} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2},$$

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{6} \quad \text{y} \quad \frac{x+2}{-2}=\frac{x-6}{1}.$$

△ Para el primer par de rectas $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, ya que $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}$. Por consiguiente, las rectas son **paralelas.**

Para el segundo par de rectas la condición de $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ no se cumple y, por lo tanto, las rectas no son paralelas.

Comprobemos si se cumple la condición de perpendicularidad de las rectas: $a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 = 3\cdot(-2)+6\cdot1=0$. Por consiguiente, las rectas son **perpendiculares.** ▲

## § 35 *. Ecuación normalizada de una recta

Sea que $l$ es una recta arbitraria (fig. 102). Designemos con $p$ la distancia entre el origen de coordenadas y la recta $l$, y con $\varphi$, el ángulo entre el eje $Ox$ y el vector normal $\boldsymbol{l}$.

Calcularemos el ángulo del eje $Ox$ en sentido antihorario. Es evidente que la posición de la recta en el plano se define por completo por las magnitudes $p$ y $\varphi$. Expresemos por medio de $p$ y $\varphi$ los coeficientes de la ecuación de la recta $l$.

Sea que $M_0$ es el punto de intersección de la recta $l$ con la recta que es perpendicular a ésta, que pasa por el origen de coordenadas, $\boldsymbol{n}_0$ es el vector unitario normal de la

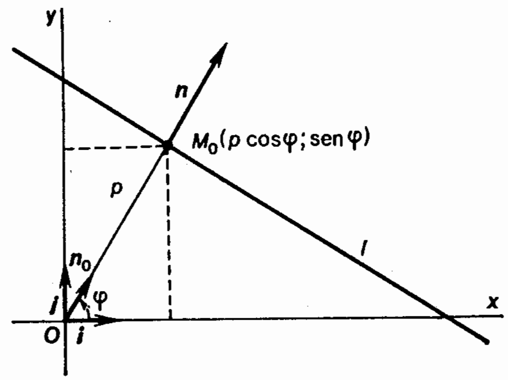



Fig. 102

recta $l$, es decir, $|\boldsymbol{n}_0| = 1$. Las coordenadas del punto $M_0$ y del vector $\boldsymbol{n}_0$ se expresan por medio de las magnitudes dadas $p$ y $\varphi$ del modo siguiente:

$$M_0\,(p\cos\varphi;\ p\operatorname{sen}\varphi), \qquad \boldsymbol{n}_0 = (\cos\varphi;\ \operatorname{sen}\varphi).$$

En el §29 fue deducida la ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_0;\ y_0)$ con el vector normal $(A;\ B)$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y + y_0) = 0.$$

Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas del punto $M_0$ y del vector $\boldsymbol{n}_0$, obtendremos

$$\cos\varphi\,(x - p\cos\varphi) + \operatorname{sen}\varphi\,(y - p\operatorname{sen}\varphi) = 0,$$

ó

$$x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - p\,(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = 0.$$

Como resultado obtenemos la ecuación

$$x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi - p = 0,$$

que se denomina *ecuación normalizada de una recta.*

En una ecuación normalizada todos los coeficientes tienen sentido geométrico: los coeficientes con las variables $x$ e $y$ son coordenadas del vector unitario normal de una recta; el término independiente $(-p)$ es igual a la distancia entre el origen de coordenadas y la recta tomada con el signo «menos». Señalemos una vez más, que en una ecuación normalizada de una recta el término independiente es menor o igual a cero.

Examinemos por ejemplo, la ecuación $x - y + 5\sqrt{2} = 0$. No es una ecuación normalizada: el vector $(1;\ -1)$ no es un vector unitario, ya que $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{2} \neq 1$; el término independiente de la ecuación es positivo. Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces, la ecuación de la recta tomará la forma

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 5 = 0,$$

y se hará normalizada, ya que ahora el vector $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es, ciertamente, unitario, y el término independiente de la ecuación es negativo. El vector normal de la recta en cuestión forma con el eje $Ox$ tal ángulo $\varphi$ que $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, o sea, $\varphi = 135°$. La recta pasa a la distancia de cinco unidades de longitud del origen de coordenadas.

La ecuación general de una recta

$$Ax + By + C = 0$$

siempre se puede reducir a una forma normalizada (normalizar). Si $C \leqslant 0$, multiplicando por el factor normalizador $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ambos miembros de la ecuación, obtendremos la ecuación

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

que es normalizada, ya que el vector $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ como se comprueba fácilmente, es un vector unitario, y el término independiente de la ecuación es menor o igual a cero.

El caso de $C > 0$ se reduce al anterior multiplicando por $-1$ ambos términos de la ecuación. Por lo tanto, si $C > 0$, por factor normalizador se debe tomar el número $-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

**Problema.** Calcúlese la distancia entre el origen de coordenadas y la recta $6x - 8y + 25 = 0$.

△ Puesto que $C = 25 > 0$, al multiplicar ambos miembros de la ecuación por el factor normalizador $-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{36+64}} = -\frac{1}{10}$, obtendremos la ecuación normalizada de la recta dada

$$-0{,}6x + 0{,}8y - 2{,}5 = 0.$$

Teniendo en cuenta el sentido geométrico del término independiente de la ecuación normalizada de una recta, llegamos a la conclusión de que la distancia buscada es igual a 2,5. ▲

## § 36. Distancia de un punto a una recta

Sea que se dan el punto $M_1$ $(x_1;\ y_1)$ y la recta $l$ definida por su ecuación normalizada

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p = 0.$$

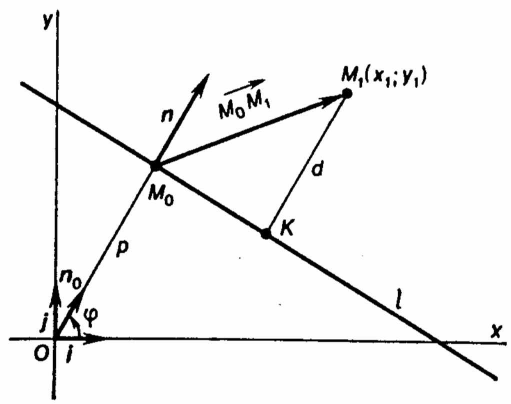



Fig. 103

Hallemos la distancia $d$ del punto $M_1$ a la recta $l$, es decir, la longitud del segmento $M_1K$, donde $K$ es la proyección del punto $M_1$ sobre la recta $l$ (fig. 103).



Supongamos que, como en el párrafo 35, $M_0$ $(p \cos \varphi;\ p \operatorname{sen} \varphi)$ es el punto de intersección de la recta $l$ con la recta perpendicular a ella, que pasa por el origen de coordenadas; $\boldsymbol{n}_0 = (\cos \varphi;\ \operatorname{sen} \varphi)$ es el vector normal unitario de la recta $l$.

La distancia buscada $d$ es igual al módulo de la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\overrightarrow{KM_1}$ o, puesto que $\overrightarrow{KM_1}$ y $\boldsymbol{n}_0$ son colineales, sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$. Así pues,

$$d = |\operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}_0} \overrightarrow{M_0M_1}|.$$

Expresemos la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$ por medio del producto escalar de estos vectores. Conforme a la fórmula (3) del § 17 obtendremos

$$d = |\operatorname{pr}_{\boldsymbol{n}_0} \overrightarrow{M_0M_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \boldsymbol{n}_0|.$$

Puesto que $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - p \cos \varphi;\ y_1 - p \operatorname{sen} \varphi)$ y $\boldsymbol{n}_0 = (\cos \varphi;\ \operatorname{sen} \varphi)$, entonces

$d = |(x_1 - p \cos \varphi) \cos \varphi + (y_1 - p \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \varphi| = |x_1 \cos \varphi + y_1 \operatorname{sen} \varphi - p (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)|$ y definitivamente

$$d = |x_1 \cos \varphi + y_1 \operatorname{sen} \varphi - p|. \qquad (1)$$

Así pues, *la distancia de un punto a una recta es igual al módulo del número que se obtiene como resultado de la sustitución en el primer miembro de la ecuación normalizada de una recta de las coordenadas del punto dado.*

**Problema 1.** Determínese la distancia del punto $M$ (3; 2) a la recta $4x - 3y + 14 = 0$.

△ Normalizamos la ecuación de la recta. En el caso dado el factor normalizador es el número $-\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{5}$. Por lo tanto, la ecuación $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{14}{5} = 0$ será la ecuación normalizada de la recta dada. Según la fórmula (1) hallamos la distancia

$$d = \left|-\frac{4}{5} \cdot 3 + \frac{3}{5} \cdot 2 - \frac{14}{5}\right| = \frac{|-12+6-14|}{5} = 4. \ ▲$$

**Problema 2.** Hállese la distancia entre las rectas paralelas $24x - 10y + 39 = 0$ e $y = \frac{12}{5}x - \frac{26}{5}$.

△ Para determinar la distancia entre dos rectas paralelas es suficiente elegir en una de ellas un punto cualquiera y hallar luego la distancia de este punto a otra recta.

El punto $M$ (0; 3,9) está situado en la primera recta, ya que $24 \cdot 0 - 10 \cdot 3{,}9 + 39 = 0$. Para la segunda recta $\frac{12}{5}x - y - \frac{26}{5} = 0$ el factor normalizador es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{13},$$

por lo tanto, su ecuación normalizada será como sigue:

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 2 = 0.$$

La distancia buscada $d$ la hallamos según la fórmula (1):

$$d = \left| \frac{12}{13} \cdot 0 - \frac{5}{13} \cdot 3{,}9 - 2 \right| = \left| -\frac{3}{5} - 2 \right| = 3{,}5. \ ▲$$

## Problemas para el capítulo II

2.1. Determínese si el punto (—1; 2) pertenece al gráfico de las ecuaciones:
a) $3x + 5y - 7 = 0$; b) $2x^2 - 3xy - 8 = 0$;
c) $4x^2 - y^2 - 1 = 0$; d) $3x^2 - x + y = 6$.

2.2. Constrúyanse los gráficos de las ecuaciones:
a) $3x - 2y - 1 = 0$; b) $2x + 3y + 2 = 0$;
c) $4x^2 - 2y - 3 = 0$; d) $2x^2 - 4y - 1 = 0$;
e) $(x - 3)(x - 4) - y = 0$; f) $x^2 + y^2 = 1$.

2.3. ¿Es el punto (—3; 1) el punto de intersección de los gráficos de las ecuaciones:
a) $y - x = 4$ y $xy = -3$;
b) $x^2 - y^2 = 8$ y $3x + 12y = 1$?

2.4. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto dado $M_0$, paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:
a) $M_0$ (—1; 2), $\boldsymbol{a}$ = (3; 2); b) $M_0$ (3; 1), $\boldsymbol{a}$ = (1; 0);
c) $M_0$ (3; —2), $\boldsymbol{a}$ = (1; 3); d) $M_0$ (2; 0), $\boldsymbol{a}$ = (0; —3).

2.5. Constrúyase la recta definida por las ecuaciones:

a) $\begin{cases} x = 1 - t; \\ y = -3 + t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -2t, \\ y = 3. \end{cases}$

2.6. Constrúyase la recta que pasa por el punto $A$ (0; 3), paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$ = (2; 1).



2.7. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto $M_0$, paralelamente al vector $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0$ (3; —4), $\boldsymbol{a}$ = (1; —4); b) $M_0$ (1; 0), $\boldsymbol{a}$ = (0; 3);

c) $M_0\left(\frac{1}{2};\ 1,5\right)$, $\boldsymbol{a}$ = (—3; —2); d) $M_0$ (0; —3); $\boldsymbol{a}$ = (—4; 0).

2.8. Constrúyase la recta que pasa por el punto $E$ (4; —3), paralelamente al vector $\boldsymbol{i}$.

2.9. Escríbase la ecuación canónica de la recta que es paralela al eje $Oy$ y pasa por el punto $M_0$ (2; —4).

2.10. Una recta está dada por la ecuación $\frac{x-3}{5} = \frac{y+7}{4}$. Indíquese un punto cualquiera de la recta y su vector director.

2.11. Escríbase la ecuación canónica de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 3 = 0$ y $5x - 3y - 2 = 0$ y es paralela al vector $\boldsymbol{j}$.

2.12. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y = 3$ y $3x - 2y = 4$ y es paralela al vector $\boldsymbol{a}$ = (—7; 11).

2.13. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados, si:

a) $M_1$ (—1; 6), $M_2$ (—2; —3); b) $M_1$ (—3; 2), $M_2$ (4; 3);

c) $M_1\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{5}{6};\ 0{,}3\right)$; d) $O$ (0; 0), $M$ (3; —2).

2.14. Para la recta $y = -\frac{2}{3}x + 6$ escríbase su ecuación segmentaria.

2.15. Escríbase para la recta $3x - 7y = 5$ su ecuación segmentaria.

2.16. Hállense los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas y constrúyase esta recta:
a) $3x - 2y - 12 = 0$; b) $8x - 3y + 12 = 0$.

2.17. Se dan sucesivamente los vértices de un cuadrilátero convexo $A$ (—6; —2), $B$ (6; 7), $C$ (9; 3) y $D$ (1; —3). Determínese el punto de intersección de sus diagonales.

2.18. Calcúlese el área de un triángulo cortado por la recta $3x + 4y - 12 = 0$ desde el ángulo de coordenadas.

2.19. Escríbase la ecuación de una recta si el punto $M$ (2; 1) es el punto medio de su segmento, comprendido entre los ejes de coordenadas.

2.20. Una recta corta en los ejes de coordenadas en el primer cuadrante segmentos congruentes. Escríbase la ecuación de la recta, si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes de coordenadas es igual a 18.

2.21. Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el punto $B$ (0; 8), si el área del triángulo limitado por la recta y los ejes de coordenadas es igual a 16.

2.22. Determínese el área del triángulo limitado por la recta $5x + 8y - 40 = 0$ y los ejes de coordenadas.

2.23. Se da el triángulo con los vértices en los puntos $M$ (0; —2),

$N$ (0; 2) y $P$ (2; 4). Escríbanse las ecuaciones del lado $MP$, de la mediana $NE$ y de la altura $ND$.

**2.24.** Se da el triángulo con los vértices en los puntos $A$ (—5; —5), $B$ (1; 7) y $C$ (5; —1). Escríbanse las ecuaciones de los lados y medianas de este triángulo. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de este triángulo.

**2.25.** ¿Cuál de las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $x - y = 0$ corta en el eje de ordenadas el mayor segmento?

**2.26.** Un punto se mueve del origen de coordenadas con una velocidad de $v = 3i + 2j$. Hállese la trayectoria del movimiento del punto.

**2.27.** Constrúyase la recta que pasa por el punto $C$ (3; —2) y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ = (1; 4).

**2.28.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $D$ (2; —3) perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ = (4; —1).

**2.29.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $A$ (3; —2), perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$ = (3; —2).

**2.30.** Constrúyase la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ = (3; 4).

**2.31.** La recta está definida por la ecuación $-3(x+5) + \frac{1}{7}(y-6) = 0$. Indíquese un punto cualquiera de la recta y su vector normal.

**2.32.** Destacar entre las rectas $A(x-2) + B(y+3) = 0$ aquella recta, que es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ = (4; 1).

**2.33.** Constrúyase la recta que pasa por el punto $C$ (0; 3) perpendicularmente al vector $\boldsymbol{j}$.

**2.34.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $N$ (3; 4) y es perpendicular al vector $\boldsymbol{j}$.

**2.35.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $F$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ = (2; 5), si el punto $F$ es simétrico al punto $K$ (3; —4) respecto al eje $Ox$.

**2.36.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $AB$ y es perpendicular a él, si $A$ (3; —2), $B$ (5; —4).

**2.37.** A través de los puntos de intersección de la recta $5x - 2y - 10 = 0$ con los ejes de coordenadas están trazadas las perpendiculares a esta recta. Escríbanse sus ecuaciones.

**2.38.** En el triángulo con los vértices en los puntos $M_1$ (—4; —3), $M_2$ (—3; 4) y $M_3$ (2; 1) está trazada la mediana $M_2D$. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $M_2$ y es perpendicular a la mediana $M_2D$.

**2.39.** Escríbanse las ecuaciones de las perpendiculares bajadas de los vértices del triángulo $ABC$, donde $A$ (1; 3), $B$ (—1; 0), $C\left(1; -\frac{4}{3}\right)$, a sus lados y convénzanse de que ellos se intersecan en un solo punto.

**2.40.** Escríbase la ecuación general de cada una de las rectas dadas y señálense las coordenadas del vector normal:

a) $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -1 + t \end{cases}$  b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}$;

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$;  d) $-\frac{1}{5}(x+10) + 3\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0$.

**2.41.** La recta está definida por la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$. Escríbanse: a) la ecuación segmentaria de esta recta; b) la ecuación canónica de esta recta; c) la ecuación paramétrica de esta recta.

**2.42.** Constrúyanse las rectas:

a) $3x - y + 5 = 0$; b) $x - 3y - 4 = 0$; c) $x + y + 1 = 0$.

**2.43.** Hállese el punto de intersección de los siguientes pares de rectas:

a) $3x - 2y - 5 = 0$, $5x + y - 17 = 0$;
b) $4x - 3y - 7 = 0$, $2x + 3y - 17 = 0$;
c) $2x + 5y - 29 = 0$, $5x + 2y - 20 = 0$;
d) $3x + 2y - 13 = 0$, $5x - 3y - 9 = 0$;
e) $x - y - 7 = 0$, $3x - 3y + 5 = 0$.

**2.44.** Se dan las ecuaciones de los lados del triángulo: $x - y + 4 = 0$, $4x + 2y - 19 = 0$, $5x + 6y + 9 = 0$. Hállense las coordenadas de sus vértices.

**2.45.** Se dan las ecuaciones de dos lados del paralelogramo

$$8x + 3y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

y la ecuación de una de sus diagonales

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

Hállense las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

**2.46.** Se dan las ecuaciones de dos lados del paralelogramo $x - 4y + 11 = 0$, $2x + y - 5 = 0$ y la ecuación de una de sus diagonales $x - y - 1 = 0$. Hállense las coordenadas de los vértices de este paralelogramo.

**2.47.** ¿Cómo están situadas las rectas: $y - x = 0$; $2x + y = 0$; $4x - 12 = 0$; $6y + 24 = 0$; $2x - 3y = 0$; $x = -4{,}5$; $y = 8$? Constrúyanse estas rectas.

**2.48.** Escríbanse las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $N$ (4; —3) y son paralelas a los ejes de coordenadas.

**2.49.** Escríbanse las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P$ (5; —2) y son perpendiculares a los ejes de coordenadas.

**2.50.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $D$ (—3; —2) y el origen de coordenadas.

**2.51.** Calcúlese el coeficiente angular de la recta que pasa por los puntos $A$ (3; 5) y $B$ (—2; 4).

**2.52.** ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por los puntos $A$ (2; 0) y $B$ (4; —2) con dirección positiva del eje de las abscisas?

**2.53.** Hállese el coeficiente angular de la recta que pasa por el punto $D$ (—1; —1) y el origen de coordenadas.

**2.54.** Hállese la tangente de la inclinación de una recta que pasa por el punto $C$ (—2; 1/2) y el origen de coordenadas.

**2.55.** Escríbanse las ecuaciones de dos rectas cualesquiera, pero tales, que la primera de ellas forme con la dirección positiva del eje de las abscisas un ángulo, dos veces mayor que la segunda.

**2.56.** Hállese el ángulo de inclinación de las rectas siguientes:

a) $3x + 3y - 7 = 0$; b) $2\sqrt{3}x - 2y + 5 = 0$;
c) $y + 10 = 0$;  d) $x - 5 = 0$.

**2.57.** Se da la ecuación de la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$. Se requiere hallar la magnitud del ángulo entre esta recta y la dirección positiva del eje de las abscisas.

**2.58.** Hállese el coeficiente angular de la recta $3x - 7y + 2 = 0$ y constrúyala.

**2.59.** Hállese la tangente de la inclinación de la recta $3x - 4y + 13 = 0$ y determínese qué segmento corta ésta en el eje de ordenadas.

**2.60.** Determínese cuál de las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $x - y = 0$ forma el mayor ángulo con la dirección positiva del eje de ordenadas.

**2.61.** La recta está dada por las ecuaciones paramétricas $x = -3 + 3t$, $y = 2 - 6t$. Escríbase la ecuación de esta recta con el coeficiente angular.

**2.62.** Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$ y $\frac{x+3}{-3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$;

b) $\frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{3\sqrt{3}}$ y $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-3\sqrt{3}}$;

c) $\frac{x+2}{24} = \frac{y-3}{7}$ y $\frac{x-1,5}{-15} = \frac{y+\frac{4}{3}}{8}$;

d) $\frac{x-6}{1} = \frac{y}{3}$ y $\frac{x-3}{3} = \frac{y-6}{1}$;

e) $\frac{x+0,5}{\sqrt{5}} = \frac{y-4}{2}$ y $\frac{x-3,5}{\sqrt{5}} = \frac{y+7}{2}$.

**2.63.** Señálense entre los siguientes pares de rectas los pares de rectas paralelas o perpendiculares:

a) $\frac{x+1}{2} = \frac{x-3}{5}$ y $\frac{x-7}{4} = \frac{y+2}{10}$;

b) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3}$ y $\frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-2}$;

c) $\frac{x+0,3}{3} = \frac{y-0,4}{4}$ y $\frac{x-1}{12} = \frac{y+3}{-16}$.

**2.64.** ¿Para qué valor de $b$ las rectas $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5}$ y $\frac{x+1}{b} = \frac{y-6}{30}$ son paralelas?

**2.65.** ¿Para qué valor de $a$ las rectas $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{a}$ y $\frac{x}{-3} = \frac{y+4}{24}$ son perpendiculares?

**2.66.** Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $x + 5y + 9 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$;
b) $2x + y - 5 = 0$ y $3x - y + 4 = 0$;
c) $2x - 3y + 12 = 0$ y $3x - y + 5 = 0$;
d) $2x - 3y - 7 = 0$ y $x + y - 2 = 0$;
e) $3x + 2y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 9 = 0$.

**2.67.** Indíquense los pares de rectas paralelas o perpendiculares entre los siguientes pares de rectas:

a) $2x - 3y - 7 = 0$ y $4x - 6y + 9 = 0$;
b) $3x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 6y + 9 = 0$;
c) $3x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 6y - 5 = 0$.

**2.68.** ¿Para qué valor de $a$ las rectas $2x - 4y + 9 = 0$ y $ax - 2y + 9 = 0$ son paralelas?

**2.69.** ¿Para qué valor de $b$ las rectas $2x - 2y - 35 = 0$ y $x + by + 1 = 0$ son perpendiculares?

**2.70.** Examínese la posición recíproca de los siguientes pares de rectas. Determínense las coordenadas del punto de intersección, si las rectas se intersecan:

a) $x + y - 3 = 0$ y $3x + 3y - 9 = 0$;
b) $x = 4$ y $x + y = 0$;
c) $y = 0$ y $y - 7 = 0$;
d) $2x + y + 1 = 0$ y $2x + y + 5 = 0$.

**2.71.** Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $y = -2x + 5$ y $y = 3x + 4$;

b) $y = \sqrt{3}x + 7$ y $y = -\sqrt{3}x - 2$;

c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ y $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$;

d) $y = -3x + 7$ y $y = x + 4$;

e) $y = \frac{2}{3}x + 4$ y $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$.

**2.72.** Señálense los pares de rectas paralelas o perpendiculares entre los siguientes pares de rectas:

a) $y = -\frac{5}{3}x + 7$ y $y = -\frac{5}{3}x + 5$;

b) $y = \frac{3}{5}x + 3$ y $y = -\frac{5}{3}x + 5$;

c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = \frac{1}{3}x + 2$.

**2.73.** ¿Para qué valor de $a$ las rectas $y = ax + 3$ e $y = -3x + 2$ son paralelas?

**2.74.** ¿Para qué valor de $a$ las rectas $y = ax - 1$ e $y = 5x + 3$ son perpendiculares?

**2.75.** Se da la recta $3x - 4y + 5 = 0$. Determínese el coeficiente angular de la recta:

a) paralela a la recta dada;
b) perpendicular a la recta dada.

**2.76.** Se da la recta $2x - 3y + 5 = 0$. Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $M$ (4; —5) y es:

a) paralela a la recta dada;
b) perpendicular a la recta dada.

**2.77.** A través del punto de intersección de las rectas $x - y + 4 = 0$ y $4x + 2y - 19 = 0$ está trazada la recta paralela a la recta $2x - 3y + 6 = 0$. Hállese su ecuación.

**2.78.** A través del punto de intersección de las rectas $4x + 2y - 19 = 0$ y $5x + 6y + 6 = 0$ está trazada una recta perpendicular a la recta $x + y + 1 = 0$. Hállese su ecuación.

**2.79.** Se da la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$. Se requiere escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de esta recta con el eje de las abscisas y es perpendicular a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas.

**2.80.** Determínense cuáles de las siguientes ecuaciones de las rectas son normalizadas:

a) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0$; b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0$;

c) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y - 7 = 0$; d) $y - 3 = 0$;

e) $x - 15 = 0$.

**2.81.** Redúzcase en cada uno de los casos siguientes la ecuación general de una recta a la forma normalizada y hállese la distancia del origen de coordenadas a la recta dada:

a) $3x - 4y - 25 = 0$: b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 20 = 0$;

c) $x + 5 = 0$; d) $5x - 12y + 26 = 0$;

e) $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 13 = 0$.

**2.82.** Se da la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Determínese la distancia hasta esta recta desde el origen de coordenadas.

**2.83.** Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son perpendiculares a la recta $2x + y = 0$, si la distancia del origen de coordenadas a estas rectas es igual a 3.

**2.84.** Hállese la distancia desde un punto dado hasta una recta dada:

a) $M_0\left(\frac{3}{2};\ 9\right)$; $4x + 3y - 8 = 0$;

b) $M_0\left(-\frac{3}{2};\ -9\right)$, $4x + 3y - 17 = 0$.

**2.85.** Calcúlense las distancias entre las rectas paralelas:

a) $4x - 3y + 25 = 0$, $8x - 6y + 25 = 0$;
b) $5x - 12y + 26 = 0$, $5x - 12y - 13 = 0$;
c) $3x - 4y - 20 = 0$, $6x - 8y + 25 = 0$.

**2.86.** Se dan los vértices del triángulo: $A$ (2; 1), $B$ (−2; 3) y $C$ (−10; −13). Calcúlese la longitud de la perpendicular bajada del vértice $B$ a la mediana trazada del vértice $C$.

**2.87.** A través del punto de intersección de las rectas $3x + 2y - 13 = 0$, $x + 3y - 9 = 0$ está trazada una recta paralelamente a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. Escríbase su ecuación. Hállese la distancia de esta recta a la recta $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$.

**2.88.** Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $4x + 3y + 1 = 0$ y distan de ella en 3 unidades.

**2.89.** Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a las rectas $3x + 2y = 5$ y $6x + 4y + 4 = 0$ y cuya distancia hasta estas rectas sea igual.

**2.90.** Fórmese la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 2) de manera, que la distancia hasta ésta desde los puntos (2; 3) y (4; −5) sea igual.