Geometría Analítica I

LECTURA 9

Ayudante: Guilmer González — Día 21 de septiembre, 2004

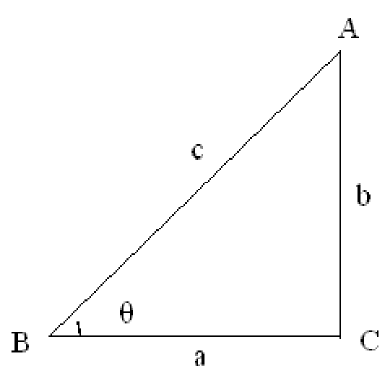
El día de hoy veremos:

0. Comentarios del trabajo último entregado.
1. Cómo calcular algunos ángulos elementales.
2. Algunas relaciones trigonométricas.

1 Cómo calcular algunos ángulos elementales

1.1 Funciones trigonométricas

Consideremos el triángulo rectángulo



observamos las siguientes funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= b/c & \cos\theta &= a/c \\ \csc\theta &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = c/b & \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = c/a \\ \tan\theta &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = b/a & \cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = a/b \end{aligned}$$

`Dibujar el triángulo y preguntar a los alumnos sobre las funciones trigonométricas`

Observando simplemente la figura, podemos encontrar fórmulas para el ángulo complementario

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = \cos\theta \qquad \cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\,\theta$$

`Preguntar por la tangente del ángulo complementario`

Observamos otro tipo de relaciones entre los ángulos positivo y negativo, por ejemplo

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\,\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

1.2 Calcular algunos ángulos especiales

`Preguntar cuáles son los ángulos especiales`

Consideremos un triángulo rectángulo e isósceles, cuyos catetos miden 1, por consiguiente su hipotenusa vale $\sqrt{2}$. `Dibujarlo.`

De igual forma, consideremos un triángulo equilátero, de lado 2, con esto observamos que su base es $\sqrt{3}$. `Dibujarlo`. Calculemos los ángulos especiales:

ángulo	sen	cos	tan	csc	sec	cot
30°	1/2					$\sqrt{3}$
45°		$1/\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		
60°			$\sqrt{3}$			

`Ir preguntando a la clase sobre los valores en las casillas.`

2 Algunas relaciones trigonométricas

Otras relaciones entre las funciones trigonométricas son aquellas que ligan el cálculo de la suma del seno o coseno de dos ángulos en base que se conoce cómo calcular cada uno de ellos, por ejemplo

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen }\alpha\text{sen }\beta$$

`Citar la prueba o comentarla; preguntar sobre ella.`

Otra relación que puede obtenerse es para el seno de la suma de dos ángulos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\alpha\text{sen }\beta + \text{sen }\alpha\cos\beta$$

Con estas relaciones podemos obtener fácilmente la que corresponde a la tangente

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Ejercicio: Calcular $\cos 75°$ y el sen $15°$

Notemos que $75 = 45 + 30$, ángulos especiales y por otra parte usando

$$\cos(45° + 30°) = \cos 45° \cos 30° - \text{sen}45°\text{sen}30°$$

`Desarrollar el otro ejercicio en clase.`

De la relaciones anteriores para el seno y coseno de la suma de dos ángulos obtenemos fácilmente otras, por ejemplo

$$\begin{aligned}
\text{sen } 2\alpha &= 2\text{sen }\alpha\cos\alpha \\
\cos^2\alpha &= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha \\
\cos^2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1
\end{aligned}$$

De igual forma, y usando simple álgebra obtenemos las relaciones no menos conocidas

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\,\alpha + \operatorname{sen}\,\beta &= 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\operatorname{sen}\,\alpha - \operatorname{sen}\,\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

y algunas otras como el producto entre dos funciones trigonométricas. `Solamente comentarlo, no escribirlas`

Es en ocasiones "saludable" verificar que las fórmulas obtenidas o bien que deseamos emplear, sea correctas, es fácil confundir el signo, por lo que una rápida auscultación nos permitirá usarlas adecuadamente. Por ejemplo, deseamos saber si escribimos corectamente la relación

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

se sabe que $\cos 0 = 1$, y que sen 0=0, con ello se verifica. Otro es que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ y que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, luego también se verifica. Con estos valores podemos rápidamente verificar si cometimos algún error.

Ejercicios:

a) Encuentre el valor de $\cos 165°$

b) Encuentre el valor de $\tan\frac{5\pi}{12}$

c) Mostrar que $\operatorname{sen}\,(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$

d) Mostrar que $\operatorname{sen}\,(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}\,\theta$

e) Verifique que $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$