

Geometría Analítica I

LECTURA 8

Ayudante: Guilmer González

Día 09 de septiembre, 2004

El día de hoy veremos:

1. Elementos del análisis de la forma de una gráfica.
2. Graficar algunas funciones implícitas.

1 Algunos elementos del análisis de una gráfica

Problema: Contamos con una expresión algebraica

$$y = f(x), \quad x = g(y), \quad \text{o} \quad F(x, y) = 0$$

el problema es describir la forma de la gráfica de la curva, vamos la representación gráfica de la colección de puntos (x, y) .

Algunos elementos esenciales que nos permiten describir la forma son:

- a) El dominio. Nos permite indicar dónde está definida, o cuándo tiene sentido hablar de la expresión.
- b) La simetría. Con ella podemos observar sólo una parte de la gráfica, y la otra obtener de forma inmediata.
- c) Los cortes con los ejes x y y . Esto nos da una idea de por dónde debe cruzar la gráfica y son puntos de referencia para comparar el resultado.
- d) La forma. Tras despreciar valores pequeños o bien, llevar a cabo un análisis para valores grandes, podemos deducir la forma que presenta hacia las “afueras” o bien, al rededor de un punto.
- e) Asíntotas. Con ellas indicamos el comportamiento de la curva al aproximarse a una función en el límite.

- f) Puntos singulares y de inflexión. Nos indica los cambios de convexidad o bien la forma en una vecindad o región.

Preguntar a los alumnos, los elementos que consideran o bien qué es lo que generalmente observan de la expresión para hacer el trazo de su gráfica.

Consideremos las siguientes expresiones:

1. $3x - 2y + 4 = 0$
2. $3x^2 - 2y + 4 = 0$
3. $3x - 2y^2 + 4$
4. $3x^2 - 2y^2 + 4 = 0$
5. $3x^2 - 2y^2 + 4x = 0$
6. $3x^2 - 2y^2 + 4xy = 0$

Indicar rápidamente la forma. Preguntar lo que obtuvieron.

Una vez que hemos ganado experiencia, consideremos relaciones más complicadas

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 2}$
2. $f(x) = \sqrt{-2 - \frac{x^2}{2}}$
3. $f(x) = x + \sqrt{\frac{x^2}{2} + 2}$
4. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$
5. $x^2 + y^4 = 1$
6. $x^2 - y^4 = 1$
7. $x^3 + y^3 = 1$

8. $x^3 - y^3 = 1$

Hacer algunas observaciones sobre las gráficas

Ejemplo: Considere la siguiente expresión

$$(x - y)^2 + (x + 2y)^2 = 10$$

tracemos la gráfica que describe.

Pasar a la pizarra a dos estudiantes, que cada uno de su punto de vista

Podemos usar el álgebra para obtener una expresión en la forma conocida

$$F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + \text{cte.} = 0$$

Luego fijar y y observar $y = f(x)$, o bien, fija x y observar el comportamiento de $x = g(y)$.

Preguntar si hay alguna otra idea.

De la expresión $F(x, y) = 0$, consideremos $\bar{x} = x - y$ y $\bar{y} = x + 2y$, la hacerlo obtenemos

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 10$$

lo cual es una elipse en los ejes \bar{x} y \bar{y} . Luego $F(x, y) = 0$ es una elipse. Preguntar cómo es forma en x y y , los ejes originales

Ejercicio: Considere la siguiente expresión

$$(x - y)^2 - (x + 2y)^2 = 10$$

trace su gráfica.