Geometría Analítica I

LECTURA 3

Ayudante: Guilmer González Día 24 de agosto, 2004

El día de hoy veremos:

1. Problemas comunes que se tuvieron con el trabajo pasado.
2. Método de Newton.
3. Comentarios sobre cómo trazar la curva de Bezier dado los puntos de control, mediante el algoritmo de Casteljau.

1 Problemas con los Trabajos

Los problemas que se observaron en los trabajos fueron

1. Descripción del problema. El problema a resolver debe ser descrito, bajo la idea de platicarlo a otro y convencerle con nuestros argumentos.
2. La presentación. Hay recursos que podemos usar: lápices de colores, hojas a cuadros, pero lo que es más importante, aquello que sabemos, sus propiedades.

`Comentar sobre que no basta un número o una gráfica, es importante la descripción de las propiedades`

Resolver el siguiente problema.

Un puente de 100mts. que une dos poblados tiene una viga en forma parabólica. Se han dispuesto 6 soportes de la viga a lo largo del puente igualmente espaciados. La flecha, vamos el punto más alto de la viga, tiene una altura de 25mts. Calcule el tamaño de cada uno de los soportes. `Sugerencia`: Haga un dibujo del puente con la viga y los soportes, y considere el origen del sistema en el centro del puente.

Consideremos el puente y la viga que lo atraviesa dispuestos en la figura siguiente:

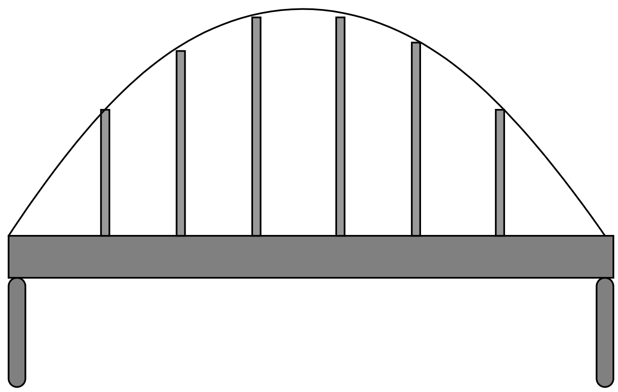

Figura 1: El puente con viga parabólica y sus postes igualmente espaciados.

El problema es encontrar el tamaño de los postes, bajo la idea que se encuentren igualmente espaciados sobre el puente.

Considereaciones físicas: El vértice de la parábola se encuentra a la mitad del puente. `Comentar que este dato no se encuentra en la descripción del problema, sin embargo simplifica la solución al mismo.`

Consideraciones matemáticas: El origen del sistema se encuentra en el centro del puente, el eje y es positivo hacia arriba. `Comentar que es posible tomar otro punto de referencia para el sistema, es sólo una sugerencia la señalada`

Dada las condiciones y las consideraciones hechas, la forma de la parábola es

$$f(x) = -ax^2 + 25$$

esto es, su eje de simetría es el eje y, y por otra parte, la parábola pasa por $(-50, 0)$ y $(50, 0)$. Con esto debemos encontrar el coeficiente a. Para ello, resolvamos para $f(50) = 0$

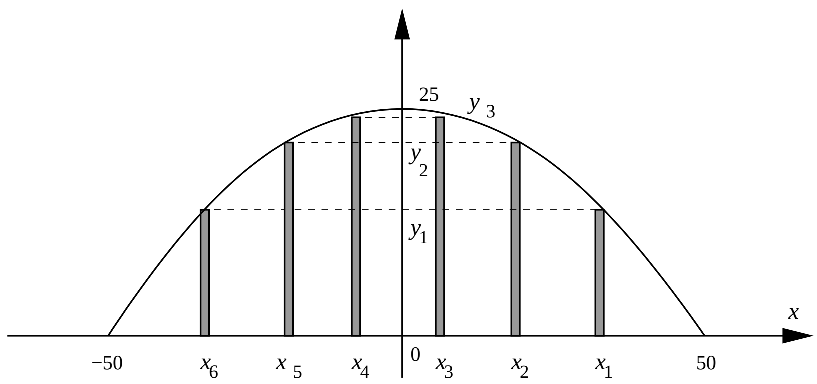

Figura 2: Sistema coordenado para el problema del puente.

$$
\begin{aligned}
-a(50)^2 + 25 &= 0 \\
-a &= \tfrac{-25}{(50)^2} \\
a &= \tfrac{1}{100}
\end{aligned}
$$

con esto, la parábola

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 25$$

Ahora, debemos distribuir los soportes sobre el puente igualmente espaciados. Naturalmente no habr soporte en los puntos en que la viga toca el puente, pero los cercanos a estos puntos estarán a la misma distancia. Por lo que contamos con 7 espacios igualmente distribuidos entre cada soporte. `Dada la numeración elegida para los postes, indicar el valor posicional de cada poste`

Una vez obtenida la posición de cada poste, para encontrar la altura de cada uno de ellos, bastaría evaluar en la posición de cada poste.

`Hacer en el pizarrón cada paso, mostrar que una mejor numeración nos conduce a un mejor control de la posición de cada poste.`

2 Método de Newton

Consideremos el siguiente problema: **Encontrar el cero de una función**, de manera particular, las raíces de un polinomio.

Un método numérico para encontrar cero de funciones, es el Método de Newton, que se basa en aproximar la función $f(x)$ por medio de un modelo lineal $m(x)$ en una vecindad de un punto $x = x_0$,

$$m(x) = ax + b \approx f(x)$$

para luego, encontrar el cero del modelo lineal, este problema que es más sencillo debe ser resuelto eficientemente.

Dado un punto $x = x_0$, considerando a la función y su derivada, el modelo lineal obtenido con los primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = x_0$, tiene la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Otra forma de obtener el modelo, es considerando la información que se tiene: se cuenta con un punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$, y dado que la función es suave, es polinomial, contamos con la derivada de la función, por lo que es múy fácil obtener una representación para la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y es tangente al mismo, esa representación es la que se indicó anteriormente.

De esta expresión para el modelo lineal, resolvemos el cero $m(x) = 0$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

es decir, encontramos el punto que corta al eje x. Esta será nuestra aproximación al cero de $f(x)$ a partir de x_0. La idea del método de Newton es iterar con el nuevo punto obtenido hasta lograr un criterio de paro, lo que es válido para funciones muy suaves. Observemos de manera gráfica el algoritmo, representado en la Figura 3.

El método de Newton es un método iterativo que converge rápidamente si nos encontramos cerca de la solución, y bajo ciertas condiciones, sobre la

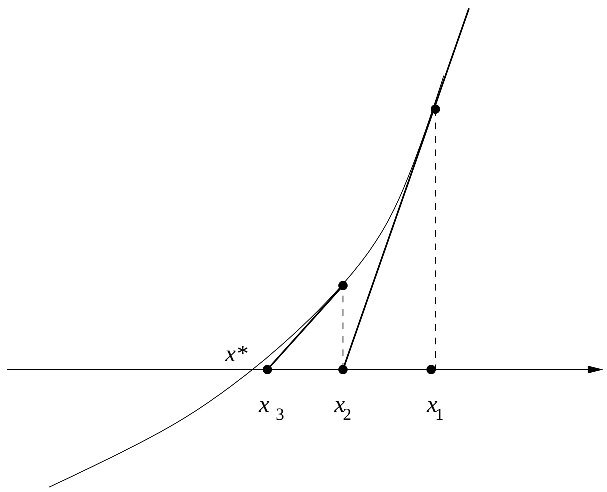

Figura 3: Proceso gráfico del Método de Newton.

derivada y segunda derivada, podemos asegurar convergencia al cero. Este método es iterativo, en el sentido de que partiendo de una aproximación, digamos $x = x_n$, la corregimos para lograr otra

$$x_{n+1} = x_n + c_n$$

donde

$$c_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n))}$$

es la corección a la aproximación x_n.

`Observar en clase que la aproxicimación primera, de la que se parte o condición inicial es un arte. Observar que si estamos cerca de la solución, el método converge rápidamente.`

Ejemplo: Encontremos la raiz cuadrada de 5.

Procedimiento: A través del método de Newton, encontremos $\sqrt{5}$. Para esto, debemos transformar el problema a encontrar $\sqrt{5}$ como el cero de una función polinomial. Observando que $x = \sqrt{5}$, tenemos que $x^2 = 5$, luego $x = \sqrt{5}$ es un cero de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 5$. La función es polinomial, contamos con su derivada en todo punto $f'(x) = 2x$. Ahora necesitamos un punto inicial adecuado.

Observemos cómo se comporta la solución al rededor de $\sqrt{5}$

1) Si $x > 3$, $f(x) > 0$.

2) Si $0 < x < 1$, $f(x) < 0$

por consiguiente en el intervalo $[1,\ 3]$ encontramos $\sqrt{5}$. Porpongamos $x_1 = 2$. El método de Newton nos dice que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

`Comentar que` $f'(x_n) \neq 0$.

con lo que obtenemos que $x_2 = 2.5$, usando esta información, para el siguiente paso

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

obtenemos que $x_3 = 2.3611$. Haciendo algunos pasos más obtenemos la sucesión

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 2.5 \\
x_3 &= 2.2361111111 \\
x_4 &= 2.2360679779 \\
x_5 &= 2.2360679774
\end{aligned}$$

si contaramos con más cifras, en una iteración más ganaríamos 10 cifras decimales.

`Comentar sobre la importancia del punto inicial.`

Ejercicios: Calcular los ceros de las siguientes funciones a través del método de Newton:

1. $f(x) = x^3 - x$
2. $f(x) = x^3 + x^2$
3. $f(x) = x^3 - 2x - 1$
4. $f(x) = -2x^3 + x^2 + x - 1$

Observar la rapidez de convergencia del método. Observar que no siempre esto ocurre, que existen casos patológicos, citar la referencia:

http://www.math.umn.edu/~garrett/qy/BadNewton.html

donde se trata de resolver el cero de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 0.4$$

Debemos asegurar un intervalo donde se encuentre el cero, y ahí experimentar. Mientras más pequeño sea éste, más rápido obtendremos una proximación al cero de $f(x)$, en realidad importa que la función sea ‘‘convexa’’ cerca del cero.