# Geometría Analítica I

LECTURA 2

Ayudante: Guilmer González — Día 19 de agosto, 2004

El día de hoy veremos:

1. Repaso general de la función de segundo grado:
   a) casos particulares del trinomio
   b) algunas propiedades
2. Algunos problemas donde encontramos cuadráticas.

## 1 Repaso general de la función de segundo grado

En la clase de ayer estudiamos algunos casos particulares del trinomio,

$$y = ax^2 + bx + c$$

básicamente la idea es observar el comportamiento del trinomio en la forma $y = \hat{a}\hat{x}^2 + \hat{b}$, donde $\hat{x}$ es una expresión de lineal en $x$, es decir, visualizarlo como una parábola trasladada sobre $x$ y $y$.

Los casos particulares los escribimos como:

1. $y = ax^2$;   $b = c = 0$, y $a \neq 0$.
2. $y = ax^2 + c$;   $b = 0$, $a \neq 0$, y $c \neq 0$.
3. $y = ax^2 + bx$;   $c = 0$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
4. $y = ax^2 + bx + c$, con coeficientes distintos de cero.

En cada caso discutimos las gráficas de las funciones, ahora veamos sus propiedades.

Consideremos el trinomio

$$y = ax^2 + bx + c$$

el cual lo podemos llevar a la representación

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{2a}$$

`Llegar a esta expresión en clase.`

A partir de esta expresión, observamos:

a) La función está definida en todo $\mathbb{R}$.

b) No es inyectiva. No es suprayectiva.

c) Si $a > 0$, observamos que es convexa, por consiguiente, decrece y crece, de izquierda a derecha. En el intervalo $(-\infty, -b/2a)$ es decreciente, y creciente en $(-b/2a, \infty)$. En $x = -b/2a$ obtenemos un mínimo.

d) Si $a < 0$, observamos que es cóncava. La función crece hasta antes de $x = -b/2a$, y decrece a partir de ese punto. En ese punto observamos un máximo.

`Preguntar a los estudiantes sobre las propiedades e irlas enunciando. Preguntar si conocen alguna otra.`

**Propiedad:** Sea $f(x) = ax^2 + 2bx + c$, con $a > 0$. Si $x_1 \neq x_2$, son puntos tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$x_* = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

minimiza a $f(x)$.

`Discutir esta propiedad en clase.`

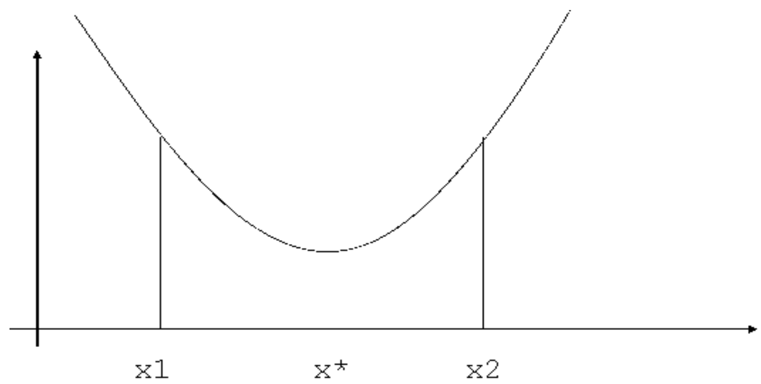


Figura 1: Propiedad del mínimo en una parábola al tirar cuerdas.

Esta propiedad es una generalización de la siguiente: si se corta a una circunferencia por una familia de cuerdas paralelas, resulta que los puntos medios de éstas se encuentran sobre su diámetro. `La circunferencia es una curva de nivel de una cuadrática.`

`Comentar sobre la importancia del estudio de las cuadráticas. Citar el puzle de maths online, para reconocer gráficas.`

# 2 Ejemplos donde las cuadráticas están involucradas

### Tiro parabólico

Supongamos que se dispara un proyectil, con velocidad inicial $v_0$, desde una altura $h$, formando un ángulo $\theta$ con la horizontal. El problema es calcular la máxima altura alcanzada y la distancia horizontal recorrida al lanzar el proyectil.

Como suposiciones simplificadoras se despreciará el rozamiento del aire y se considerará que la aceleración de la gravedad es constante durante el vuelo del proyectil.

Para plantear el tiro parabólico, usamos la segunda ley de Newton

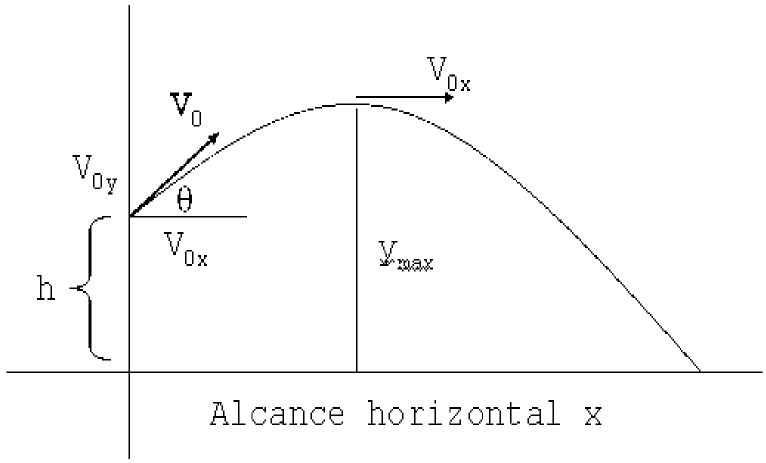


Figura 2: Tiro parabólco

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Como hemos despreciado el efecto del rozamiento del aire la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la fuerza de la gravedad. Además, ésta está siempre dirigida hacia abajo (dirección y negativa). Por otra parte, la aceleración es, por definición:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt}$$

Donde $\vec{r} = (x, y)$ es el vector de posición del proyectil. Sin mayor preámbulo, tenemos que

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \\ x &= x_0 + v_{0x}t \end{aligned}$$

Con esto, podemos ya calcular el alcance máximo del proyectil.

`Discutir otros ejemplos. Hablar del problema del paracaidista.`

**Ejercicio:** De todos los rectángulos de perímetro $p = 24m.$, encontrar aquel cuya área sea la mayor.