# Geometría Analítica I
LECTURA 19

Ayudante: Guilmer González Día 25 de noviembre, 2004

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos últimos.

2. Algoritmo para calcular la distancia entre dos líneas.

## 1 Forma paramétrica de una línea

En $2D$ observamos que requerimos de un vector $\vec{a}$, el llamado vector de dirección y un punto $Q$ sobre la recta para describir, mediante un parámetro $\alpha$, los puntos $P$ sobre la línea.

$$P = Q + \alpha\vec{a}$$

De manera práctica, podemos describir la línea que pasa por dos puntos de la siguiente forma:

> Sean $P$ y $Q$ dos puntos sobre una línea. $\vec{PQ} = Q - P$, es un vector que parte de $P$ hacia $Q$. $t(Q-P)$ es un vector $t$ veces $\vec{PQ}$.
>
> $$P + t(Q - P)$$
>
> para $-\infty < t < \infty$, describe la línea que pasa por $P$ y $Q$.

Esta es la forma en que hemos trabajado la descripción de los puntos sobre una línea.

Una observación importante, es que esta representación de la línea que pasa por dos puntos, es independiente de la dimensión del problema. Trabaja tanto para 2D como para 3D, ye en general en $\mathbb{R}^n$.

Como observación, si el parámetro $t$ es tal que $0 \leq t \leq 1$, tenemos una describibición para los puntos que se encuentran entre $P$ y $Q$.

**Ejercicio**: Describa lo puntos de la recta que pasan por $A(1, 2, 1)$ y $B(3, 1, 4)$.

# 2 Distancia entre dos rectas

Hemos aprendido a calcular distancia de un punto a una recta, y hacia un segmento de recta. Llegamos a una representación inmediata para la distancia de entre dos figuras $F_1$ y $F_2$

$$d(F_1, F_2) = \min_{P \in F_1 \; Q \in F_2} d(P, Q)$$

Un caso particular que nos compete, es el cálculo de la distancia entre dos rectas. Este es un problema muy interesante ya que desde un punto de vista computacional y práctico, es importante saber en qué momento dos puntos que siguen una trayectoria estarán lo más cercano posible. Esos puntos pueden representar barcos moviendose en cierta dirección o naves en distintos planos.

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, nuestras rectas. Consideremos la forma vectorial de representar una recta; sea $P_0$ un punto de la recta $\mathcal{L}_1$, y $Q_0$ de la recta $\mathcal{L}_2$. Sea $\vec{u}$, el vector de dirección de la recta $\mathcal{L}_1$ y $\vec{v}$ el de la recta $\mathcal{L}_2$, con esto tenemos que

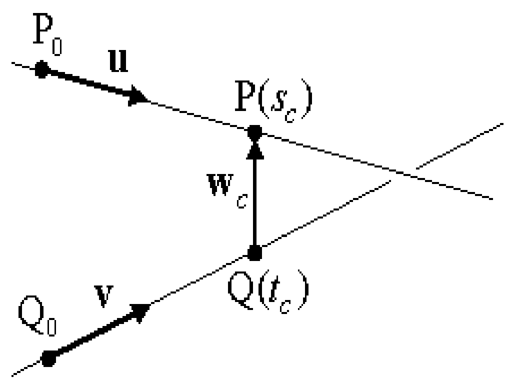
$$\begin{aligned} P(s) &= P_0 + s\vec{u}; \quad s \in \mathbb{R} \\ Q(t) &= Q_0 + t\vec{v}; \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$P(s)$ describe la línea $\mathcal{L}_1$ y $Q(t)$ describe la línea $\mathcal{L}_2$.

Consideremos $\vec{w}(s, t)$ el vector que va de un punto $Q(t)$ de $\mathcal{L}_2$ a un punto $P(s)$ en $\mathcal{L}_1$. La idea primera es encontrar $\vec{w}(s_c, t_c)$ que minimicen la magnitud de $\vec{w}(s, t)$, para cuales quiera $s$ y $t$.

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \min_{s,t} |\vec{w}(s, t)|$$

.




**Observación**:
Como observamos en clase, si las rectas no son paralelas, el segmento $\overline{P(s_c)Q(t_c)}$ une los puntos más cercanos entre las rectas es único, y es perpendicular a las dos rectas; es decir, ningun otro segmento tiene esta propiedad.

Con esta observación, el vector $\vec{w_c}(s_c, t_c)$, es perpendicular tanto al vector de dirección $u$ como a $v$. Es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{w_c} = 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{w_c} = 0$$

un problema que hemos resuelto en reiteradas ocasiones. Resolvamos de nuevo.

Por una parte, tenemos que

$$\vec{w_c} = P(s_c) - Q(t_c) = \vec{w_0} + s_c\vec{u} - t_c\vec{v}$$

donde $\vec{w_0} = P_0 - Q_0$. La condición de perpendicularidad en ambas rectas nos conduce a resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} (\vec{u} \cdot \vec{u})s_c - (\vec{u} \cdot \vec{v})t_c & = & -\vec{u} \cdot \vec{w_0} \\ (\vec{v} \cdot \vec{u})s_c - (\vec{v} \cdot \vec{v})t_c & = & -\vec{v} \cdot \vec{w_0} \end{array}$$

simplificando, nombremos $a = \vec{u} \cdot \vec{u}$; $b = \vec{u} \cdot \vec{v}$; $c = \vec{v} \cdot \vec{v}$; $d = \vec{u} \cdot \vec{w_0}$ y $e = \vec{v} \cdot \vec{w_0}$, con esto el sistema anterior lo escribimos como

$$\begin{aligned} as_c - bt_c &= d \\ bs_c - ct_c &= e \end{aligned}$$

cuya solución para $s_c$ y $t_c$ es

$$s_c = \frac{be - cd}{ac - b^2} \quad \text{y} \quad t_c = \frac{ae - bd}{ac - b^2}.$$

siempre que el denominador no sea cero.

Observemos el denominador. $ac - b^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta(\vec{u},\vec{v}))^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|\text{sen }\theta(\vec{u},\vec{v}))^2 \geq 0$. Es decir, son no negativos. Cuando $ac - b^2 = 0$, se tiene que las dos ecuaciones son dependientes, las dos rectas son paralelas y por consiguiente, la distancia entre las líneas es constante. Este problema puede ser resuelto de manera separada, fijando un punto $P_0$ en $\mathcal{L}_1$ y encontrando la distancia de ese punto a la otra recta.

Al haber encontrado $s_c$ y $t_c$, contamos con una expresión para calcular la distancia entre dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = |P(s_c) - Q(t_c)| = \left|(P_0 - Q_0) + \frac{(be - cd)\vec{u} - (ae - bd)\vec{v}}{ac - b^2}\right|$$

**Ejercicio**: Calcule la distancia entre la recta $\mathcal{L}_1$ , que pasa por los puntos $P_{11}(1,2,1)$ y $P_{12}(3,1,4)$; y la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por $P_{21}(2,2,6)$ y $P_{22}(4,1,1)$.