Geometría Analítica I

Lectura 17

Ayudante: Guilmer González Día 16 de noviembre, 2004

El día de hoy veremos:

1. Comentarios sobre los temas vistos para el examen.
2. El grupo tetraédrico.

1 Sobre los temas desarrollados

1. Coordenadas Baricéntricas.
2. Teorema de Ceva
3. Teorema de Menelao
4. Teorema de Desargues
5. Puntos especiales (Baricentro, Incentro Circuncentro, Ortocentro)
6. Recta de Euler.

Las coordenadas Baricéntricas nos permiten localizar un punto a partir de otros de referencia.

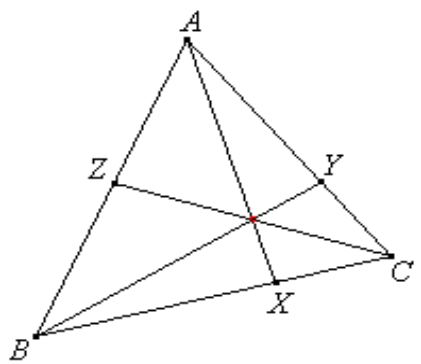
`Qué significado podemos darle al problema del balancín?` Desde el punto de vista físico: un problema de equilibrio, la búsqueda de "masas" adecuadas. En el plano de los vectores, una combinación lineal apropiada.

Este concepto de "combinación lineal convexa" puede ser extendida, de tal manera que un punto se encuentre fuera del segmento que definen dos puntos, usando de manera adecuada los "pesos" o "masas". Así dado dos puntos, sobre la recta que los definen podemos localizar cualquier punto.

Esta idea la extendemos al plano, de tal manera que dado tres puntos, podemos localizar a un punto P a partir de las "masas" asociadas a los vértices. O atacar el problema inverso, encontras las "masas" o coordenadas baricéntricas asociadas a los vértices dada la ubicación del punto. p.j. Para ubicar al punto de intersección de las medianas debemos asignarle un peso de $1/3$ a cada vector.

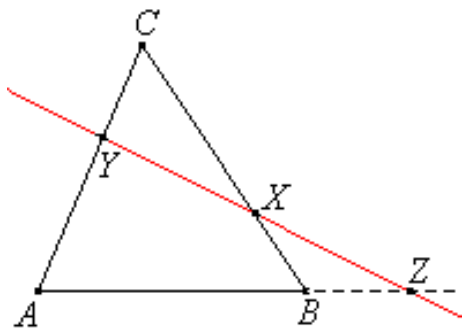
Esta idea, nos lleva a hablar de proporciones entre segmentos, y de ahí, sin mayor demora demostrar el Teorema de Ceva: Dado un triángulo $\triangle ABC$, si las tres cevianas AX, BY y CZ son concurrentes, entonces

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$



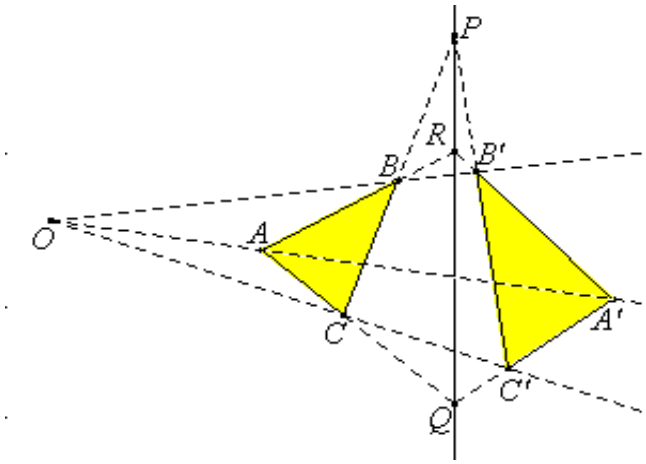
Partiendo de esto, una condición de concurrencia, podemos lograr un criterio de alineación, el Teorema de Menelao: Sean X, Y y Z puntos respectivamente sobre los lados BC, AC y AB (o sus prolongaciones). Entonces, una condición necesaria y suficiente para que los puntos X, Y, Z estén alineados es que

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$$



y esto lo pudimos demotrar usando las "masas" adecuadas para localizar los puntos X, Y, Z.

Otro problema de puntos alineados está dado por el Teorema de Desargues: Si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, entonces están en perspectiva desde una recta



Ahora pasamos a localizar algunos puntos especiales de un triángulo, básicamente obtener sus coordenadas Baricéntricas del punto:

1. Baricentro, Gravicentro: punto de intersección de las medianas.

$$\vec{g} = \frac{1 \cdot \vec{A} + 1 \cdot \vec{B} + 1 \cdot \vec{C}}{3}, \qquad G \mapsto (1,1,1) \text{ o } (1/3, 1/3, 1/3)$$

2. Incentro: punto de intersección de las bisectrices

$$I \mapsto (\text{sen } \alpha, \text{sen } \beta, \text{sen } \gamma) \text{ o } (a, b, c)$$

3. Ortocentro: intersección de las alturas

$$H \mapsto (a \cos\beta \cos\gamma, b \cos\alpha \cos\gamma, c \cos\alpha \cos\beta)$$

4. Circuncentro: intersección de las mediatrices.
   Encontrando una expresión para $\mathcal{O}$, y una relación entre éste, el Gravicentro y el Ortocentro.

2 Tetraédro: grupos simetría

Un tetraedro regular es un poliedro formado por cuatro caras triángulos equiláteros, y cuatro vértices en cada uno de los cuales concurren tres caras. Es uno de los cinco poliedros perfectos llamados sólidos platónicos: Tetraedro, Hexaedro o Cubo, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.

Un tetraedro regular tiene cuatro ejes de simetría de orden tres, las rectas perpendiculares a cada cara por el vértice opuesto de tetraedro; y seis planos de simetría, los formados por cada arista y el punto medio de la arista opuesta. Esto hace que este cuerpo tenga un orden de simetría total de 24: 2x(4x3).

`Encontrarlas y asignarle un nombre a cada transformación.`