Geometría Analítica I

LECTURA 14

Ayudante: Guilmer González — Día 14 de octubre, 2004

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos.
1. Algunos ejercicios sobre el la ley de los cosenos, y producto escalar.

1 Algunos ejercicios

Volvamos a la ley de los cosenos.

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{aligned}$$

Algo interesante de los ejercicios, son los resultados que de ahí obtenemos, ya que generamos experiencia y acrecentamos las herramientas para futuros problemas.

Del ejercicio:

Ejercicio: Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, si, y sólo si $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$.

Observamos que

$$\frac{1}{4}(|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|) = \frac{1}{4}\Big((|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}))-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b}))\Big) = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

Esto es, que

$$\frac{1}{4}(|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|)=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

es decir, una manera inmediata de calcular el producto interior de dos vectores, sin necesidad de conocer su ángulo.

Usemos esta herramienta para demostrar y calcular algunas cosas.

Ejercico: Demuestre que

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$$

`Preguntar por la pinta que muestra esta relación.`

Consideremos los vectores suma y diferencia presentes: $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$. Por consiguiente $\vec{a}=(1/2)(\vec{x}+\vec{y})$ y $\vec{b}=(1/2)(\vec{x}-\vec{y})$. Con esto

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2 &= \frac{1}{4}(|\vec{x}+\vec{y}|^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2) \\
&= \vec{x}\cdot\vec{y} \\
&= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})
\end{aligned}$$

Ejercicio: Considere el triángulo $\triangle ABC$, cuya longitud de sus lados son $|AB|=c$, $|AC|=b$ y $|BC|=a$. Encuentre la longitud de la mediana CM.

Por definición M es el punto medio de AB. Por comodidad, $m_c=|CM|$. `Hacer el trazo.`

Ahora bien, dado que es la mediana, se sigue que $\vec{CM}=(1/2)(\vec{CB}+\vec{AB})$.`Preguntar la razón de esta afirmación`.

De la ley de los cosenos se sigue que $m_c^2=(1/4)|\vec{CB}+\vec{AB}|^2=(1/4)(a^2+b^2+2(\vec{CB}\cdot\vec{CA})$.

Por otra parte $c^2=|AB|^2=|\vec{AB}|^2=|\vec{CB}-\vec{CA}|^2=a^2+b^2-2(\vec{CB}\cdot\vec{CA})$. De esto último tenemos $\vec{CB}\cdot\vec{CA}=(1/2)(a^2+b^2-c^2)$.

Sustituyendo en la primera expresión, tenemos que

$$m_c^2=(1/4)(2a^2+2b^2-c^2)$$

Bueno, más que interesarnos en recordar que la longitud de la mediana es la raíz cuadrada de lado derecho de la anterior ecuación. Observemos la relación que hemos obtenido sobre un triángulo

$$\vec{CB} \cdot \vec{CA} = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

que no es otra cosa, que la ley de los cosenos, pero expresada sobre un triángulo. Con esto, es inmediato probar que en un triángulo, se satisface que

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$