Geometría Analítica I
LECTURA 13

Ayudante: Guilmer González — Día 13 de octubre, 2004

El día de hoy veremos:

0. Comentarios sobre los trabajos.
1. La ley de los cosenos.
2. Algunos ejercicios sobre el la ley de los cosenos, y producto escalar.

1 La ley de los cosenos

Consideremos un triángulo, con vértices ABC, y por lados opuestos a los vértices a, b y c respectivamente. La ley de los cosenos se enuncia como

$$\begin{aligned} \cos\angle A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos\angle B &= \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos\angle C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}$$

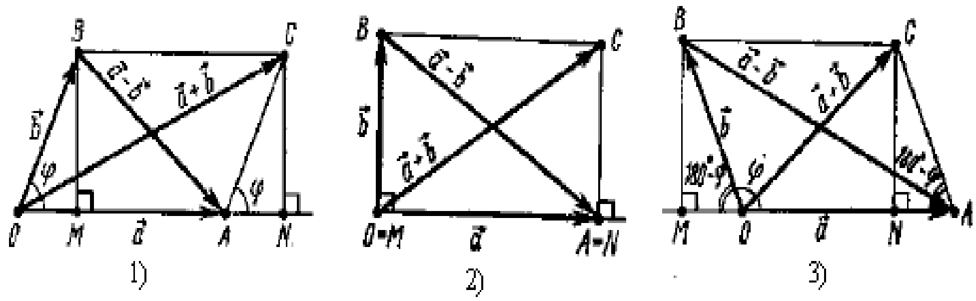
Bueno, pensemos ahora en vectores. Consideremos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cualesquiera. Las siguientes relaciones son válidas

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \end{aligned}$$

`Discutir sobre el concepto de longitud y ángulos con que contábamos en nuestra versión de la Ley de los cosenos y cómo ahora se traslada a dos expresiones. Enfatizar en el lado` $\vec{c}$ `que no se escribe.`

Consideremos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ partiendo desde un punto O, con esto, $\vec{a} = \vec{OA}$ y $\vec{b} = \vec{OB}$. Tenemos dos casos, uno cuando los vectores son no colineales o bien lo son, el segundo es trivial.

Caso 1: no colineales. Consideremos el paralelogramo $OBCA$ que se forma



en realidad tenemos varios casos, cuando el $\theta(\vec{a}, \vec{b})$ es agudo, recto y obtuso. Veamos qué obtenemos.

Denotemos por $a = |\vec{a}|$, por $b = |\vec{b}|$ y $\varphi = \theta(\vec{a}, \vec{b})$. Ahora bien, sean M y N las base de las perpenticulares sobre la recta que contiene a OA de los puntos B y C respectivamente.

Por el teorema de pitágoras, aplicado a los triángulos $\triangle AMB$ y $\triangle ONC$, se tiene que

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AM|^2 + |MB|^2 \\ |OC|^2 &= |ON|^2 + |NC|^2 \end{aligned}$$

Para el caso en que φ sea agudo. Tenemos que

$$\begin{aligned} |AM| &= |OA| - |OM| = a - b\cos\varphi \\ |MB| &= |NC| = b\sin\varphi \\ |ON| &= |OA| + |AN| = a + b\cos\varphi \end{aligned}$$

ahora bien, para el caso en que $\varphi = 90^\circ$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|AM| &= |OA| = a = a - b\cos\varphi \\
|MB| &= |NC| = b\sin\varphi \\
|ON| &= |OA| = a = a + b\cos\varphi
\end{aligned}
$$

para $\varphi > 90°$, tenemos

$$
\begin{aligned}
|AM| &= |OA| + |OM| = a + b\cos(180° - \varphi) = a - b\cos\varphi \\
|MB| &= |NC| = b\sin(180° - \varphi) = b\sin\varphi \\
|ON| &= |OA| - |AN| = a = a - b\cos(180° - \varphi) = a + b\cos\varphi
\end{aligned}
$$

En todo caso

$$
\begin{aligned}
|AM| &= a - b\cos\varphi \\
|MB| &= |NC| = b\sin\varphi \\
|ON| &= a + b\cos\varphi
\end{aligned}
$$

con esto, tenemos

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |AB|^2 = (a - b\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2 \\
&= a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})
\end{aligned}
$$

y de igual forma

$$
\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |OC|^2 = (a + b\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2 \\
&= a^2 + 2ab\cos\varphi + +b^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \\
&= a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})
\end{aligned}
$$

Para el caso en que los vectored son colineales, el resultado es inmediato.

2 Algunos ejercicios

Ejercicio 1: Demuestre que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados.

De la Ley de los cosenos, se observa que

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}+\vec{b}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

y el resultado se sigue.

Ejercicio 2: Ejercicio numérico. Dados $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, y $|\vec{a}-\vec{b}|=30$, encuentre $|\vec{a}+\vec{b}|$ y el ángulo $\theta(\vec{a},\vec{b})$.

Ejercico 3: Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, si, y sólo si $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

De la Ley de los cosenos se sigue que

$$\frac{1}{4}(|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|)=\frac{1}{4}\Big((|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}))-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b}))\Big)=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

y se sigue el resultado de manera inmediata.