Geometría Analítica I

Lectura 12

Ayudante: Guilmer González Día 11 de octubre, 2004

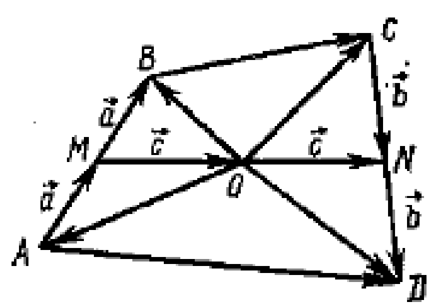
El día de hoy veremos:

0. Sobre el tema de vectores. Comentarios.
1. Algunos ejercicios de suma de vectores.
2. Sobre el producto escalar.

1 Algunos ejercicios

Sean A, B, C, D puntos de un espacio o un plano. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$, N el punto medio de $\overline{CD}$. O el punto medio de MN. Muestre que

1. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$
2. $\vec{MN} + \vec{MN} = \vec{BC} + \vec{AD}$
3. $|\vec{MN}| \leq \frac{1}{2}(|\vec{BC}| + |\vec{AD}|)$



Nuevamente un problema de fuerzas resultantes. `Pasar a alguien a la pizarra`.

El primer paso es asignar una orientación, y observar que esta sea "consistente', que se satisfaga la ley del polígono o de cierre.

Observar que al trazar los puntos medios se construyen o identifican vectores de igual magnitud e igual dirección. Nombrarlos.

Observe: $\vec{AM} = \vec{MB}$, al que designaremos por $\vec{a}$ simplemente. De igual manera tenemos el vector $\vec{CN} = \vec{ND} = \vec{b}$, $\vec{MO} + \vec{ON} = \vec{c}$.

Ahora bien, por una parte tenemos

$$\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = -\vec{c} + (-\vec{a})$$

`Enfatizar sobre la regla del triángulo, o bien la general, la del cierre`. Observe que $\vec{OA} = -(\vec{AM} + \vec{MO})$

De igual manera tenemos

$$\vec{OB} = -\vec{c} + \vec{a}, \quad \vec{OC} = \vec{c} - \vec{b}, \quad \vec{OD} = \vec{b} + \vec{c}$$

con esto

$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} &= -\vec{c} + (-\vec{a}) + (-\vec{c}) + \vec{a} + \vec{c} + (-\vec{b}) + \vec{b} + \vec{c} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ahora bien, para el segundo ejercicio. Consideremos $\vec{BC}$ y $\vec{AD}$, por la regla del cierre del polígono, se observa que

$$\vec{BC} = \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{NC} \quad \text{y que} \quad \vec{AD} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{ND}$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{BC} + \vec{AD} &= (\vec{BM} + \vec{AM}) + \vec{MN} + \vec{MN} + (\vec{NC} + \vec{ND}) \\ &= \vec{0} + \vec{MN} + \vec{MN} + \vec{0} \\ &= \vec{MN} + \vec{MN} \end{aligned}$$

El último ejercicio se sigue de la desigualdad del triángulo aplicada a los vectores $\vec{BC}$, y $\vec{AD}$, y del resultado último.

2 Sobre el producto escalar

Hacer comentarios sobre el trabajo que se está desarrollando: expresar un vector en término de otros vectores de referencia, comentar lo que se prentende con este enfoque. `Preguntar primero la idea de los temas que se han visto`.

El producto escalar entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se define com

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta(\vec{a}, \vec{b})$$

y ligando con proyecciones, lo escribimos como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \ \mathrm{Proy}_{\vec{a}}(\vec{b})$$

Con esto, podemos mostrar fácilmente la propiedad distributiva

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| \ \mathrm{Proy}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) \\
&= |\vec{a}|(\mathrm{Proy}_{\vec{a}}(b) + \mathrm{Proy}_{\vec{a}}(\vec{c})) \\
&= |\vec{a}| \ \mathrm{Proy}_{\vec{a}}(b) + |\vec{a}| \ \mathrm{Proy}_{\vec{a}}(c) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

Otro de los puntos interesante que vimos ayer, es que si nuestros vectores de referencia $\{\vec{v_3}\}$ son ortogonales dos a dos, e incluso ortonormales $|\vec{v_1}| = 1\, |\vec{v_2}| = 1, \vec{v_3}| = 1$, el producto punto entre dos vectores

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3} \\
\vec{q} &= \beta_1 \vec{v_1} + \beta_2 \vec{v_2} + \beta_3 \vec{v_3}
\end{aligned}$$

se puede escribir de una forma muy compacta

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

y con esto, el ángulo entre dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ se escribe

$$\cos\theta(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

Con esto, se observa la importancia de contar con un sistema de referencia ortonormal. Un resultado que veremos será, cómo a partir de un sistema vectorial, construir uno ortonormal.

Mañana y el jueves, veremos algunos resultados como la Ley de los cosenos, lo cual obtendremos por construcción y álgebra, veremos algunos resultados interesantes sobre paralelogramos y ejercicios donde entra el producto escalar.