EMNO 2015

Superficies Representadas por Polinomios Implícitos:

un estudio de los métodos de ajuste

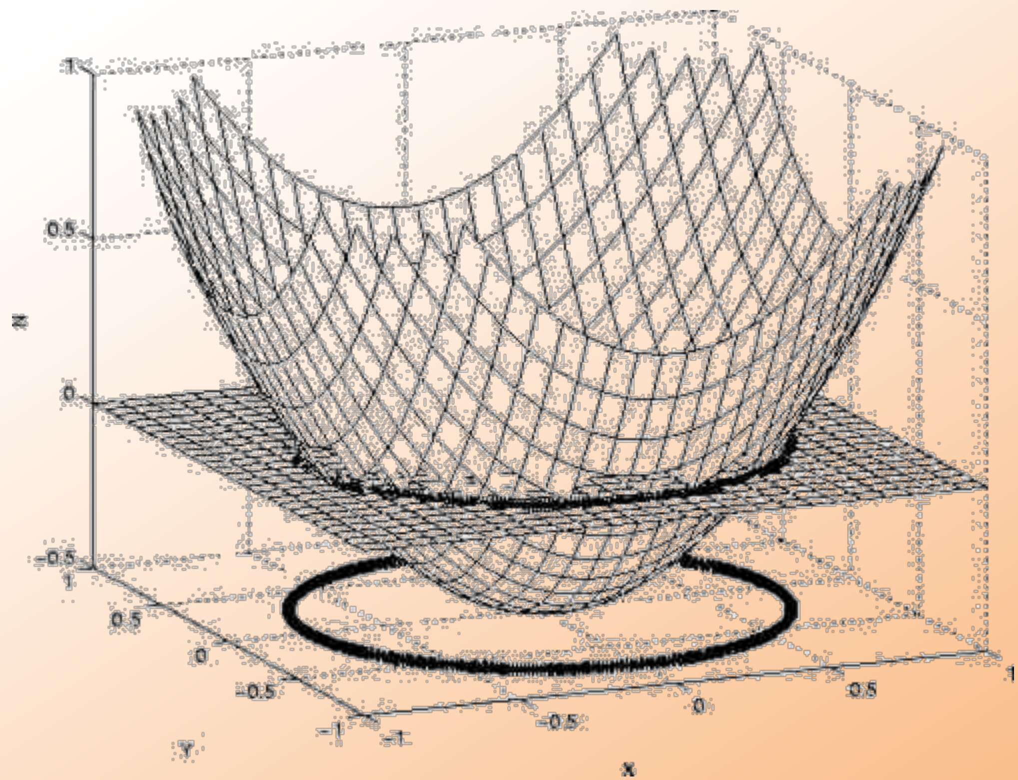
Lic. Rubén Interian
ruben@matcom.uh.cu
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de la Habana

Polinomios Implícitos

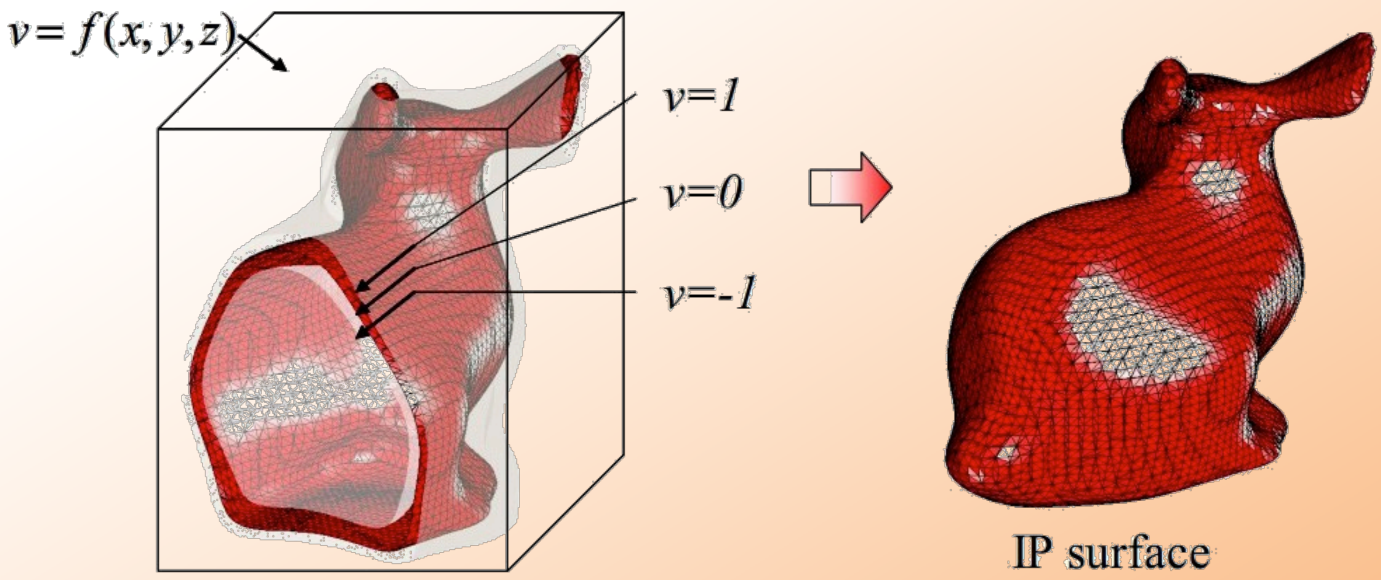
- Un Polinomio Implícito es el conjunto de ceros de una función polinomial:

$$f_a(x,y,z) = \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk} x^i y^j z^k$$

Polinomios Implícitos



Polinomios Implícitos

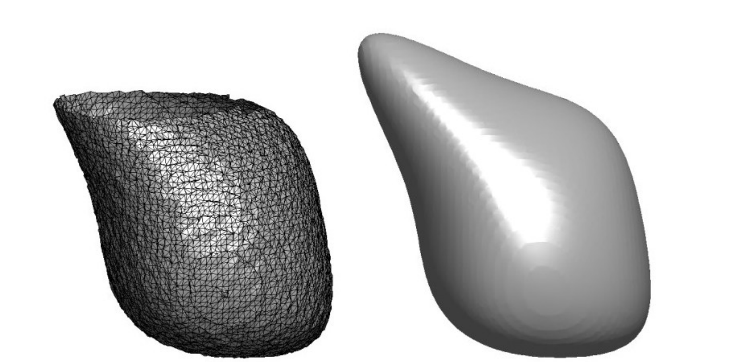


Motivación

- Los Polinomios Implícitos se han aplicado con éxito en los siguientes campos:
  - Reconocimiento y Clasificación de objetos
  - Registro de objetos (*Registration*)
  - Modelación
  - Reconstrucción 3D

Motivación

- Los Polinomios Implícitos son superiores en áreas donde es necesario:
  - Tener una representación compacta de la superficie
  - El mantenimiento de invariantes algebraicas o geométricas
  - Robustez al ruido y a la oclusión



(a) (b)

Problema de Ajuste

- Dado un conjunto de observaciones *X*, y un modelo *M* parametrizado por *a*, hallar el modelo que mejor se ajusta a las observaciones:

$$\underset{a}{\operatorname{argmin}} \sum_i dist(x_i, M(a))^2$$

- Si nuestro espacio de modelos es $M(a) = Z(f_a)$, tenemos:

$$\underset{a}{\operatorname{argmin}} \sum_i dist(x_i, Z(f_a))^2$$

Ajuste de Polinomios Implícitos

- ¿En qué se diferencian los algoritmos?
  - Como definir la distancia entre x_i y $Z(f)$
    - Enfoques lineales y no lineales
  - Como encontrar soluciones estables
    - La solución debe depender continuamente de los x_i

$$\operatorname*{argmin}_a \sum_i dist\left(x_i, Z(f_a)\right)^2$$

Enfoques Lineales

- Se basan en la Distancia Algebraica:

$$dist\left(x, Z(f_a)\right)^2 \approx f(x)^2$$

- El problema de ajuste puede transformarse:

$$f(x) = m^T a$$

$$m^T = [1 \;\; x \;\; y \;\; z \;\; x^2 \ldots]$$
$$a^T = [a_{000} \;\; a_{100} \;\; a_{010} \;\; a_{001} \;\; a_{200} \ldots]$$

$$M = \begin{pmatrix} m(x_1) \\ \ldots \\ m(x_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_i f(x_i)^2 = a^T M^T M a$$

Enfoques Lineales

- El valor de la Función Objetivo es proporcional al cuadrado de la norma de *a*
  - Se asume $\|a\| = c$
- La solución analítica es conocida: es el vector propio asociado al menor valor propio de $M^T M$
- Es muy inestable: $M^T M$ es mal condicionada, además, la F.O. no tiene interpretación geométrica inmediata $$\sum_i f(x_i)^2 = a^T M^T M a$$

Inestabilidad

Ajuste con un IP de grado 10

(a)

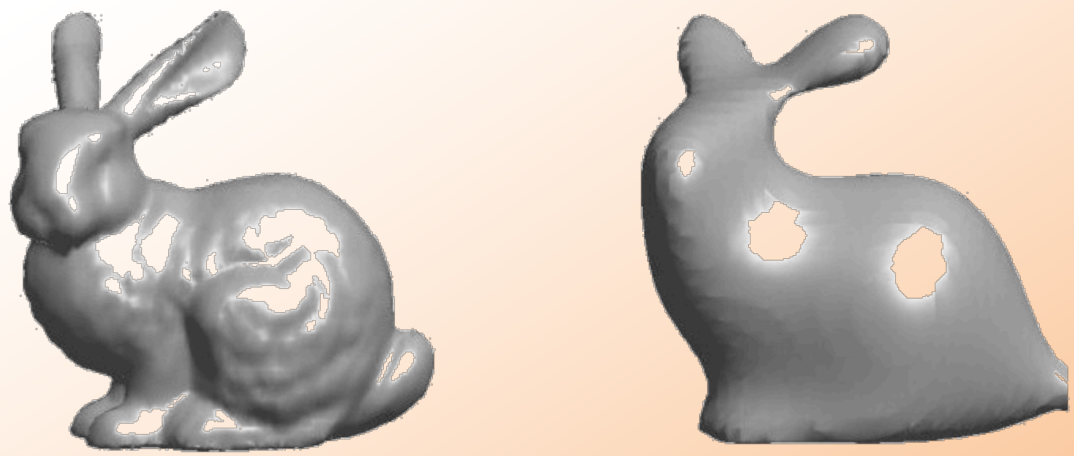
(b)

Inestabilidad

- Para estabilizar la solución, se ha propuesto:
  - Aprovechar la información geométrica (por ejemplo, algoritmo 3L)
  - Mejorar el condicionamiento de la matriz usando la Regularización de Tíjonov
    - La matriz del problema $M^T M$ pasa a ser $M^T M + \lambda I$

Inestabilidad

Regularización de Tíjonov



(a) (b)

Enfoques Lineales*

- Formulación alternativa:

$$Ma = b$$

$$M^T M a = M^T b$$

$$a = (M^T M)^{-1} M^T b \qquad (M^T M)^{-1} M^T = M^{\div}$$

Solución explícita

Pseudoinversa de Moore–Penrose

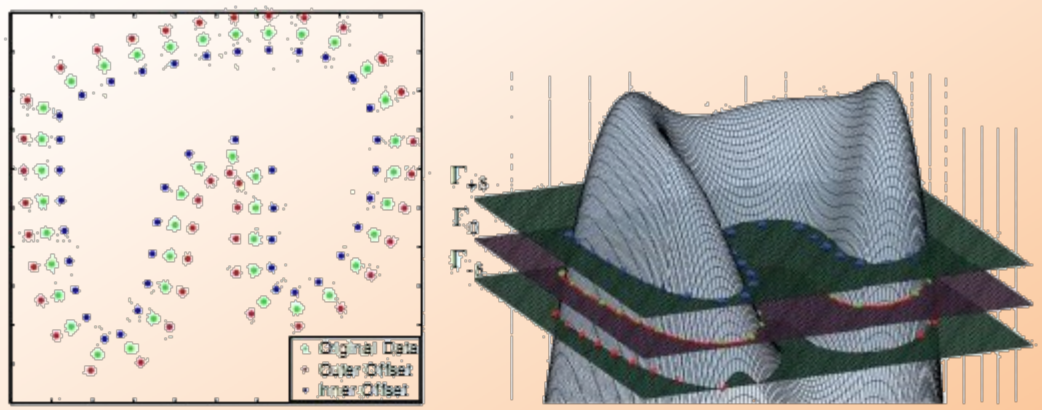
Enfoques Lineales – 3L

- Es un algoritmo que introduce otros dos niveles imaginarios L_+ y L_- con valores no nulos de la función objetivo:

$$\begin{cases} f(x_+) = +\varepsilon \\ f(x_-) = -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \quad M_{3L} = \begin{pmatrix} M \\ M_{int} \\ M_{ext} \end{pmatrix} \quad b_{3L} = \begin{pmatrix} 0_{n\times1} \\ +\varepsilon_{n\times1} \\ -\varepsilon_{n\times1} \end{pmatrix}$$

$$M_{3L}a = b_{3L}$$

Enfoques Lineales – 3L



(a) (b)

Enfoques No Lineales

- Los métodos lineales utilizan la distancia algebraica y un enfoque mínimo cuadrático con solución única
- Los no lineales, aproximan la distancia real geométrica mediante aproximaciones y/o algoritmos iterativos

Enfoques No Lineales

- La Distancia Geométrica es una aproximación de Taylor de primer orden a la distancia real:

$$f(z) = 0 \approx f(x) + \nabla f(x)(z - x)$$

$$dist\left(x, Z(f_a)\right)^2 \approx \frac{f(x)^2}{\|\nabla f(x)\|^2}$$

- Son más lentos que los lineales, aunque dan mejores y más estables soluciones

Bibliografía

- 1992 - Parameterizing and Fitting Bounded Algebraic Curves and Surfaces – G. Taubin
- 1996 - The 3l Algorithm for Fitting Implicit Polynomial Curves and Surfaces to Data – M. M. Blane
- 2000 - Improving the Stability of Algebraic Curves for Applications – T. Tasdizen
- 2005 - Fitting Globally Stabilized Algebraic Surfaces to Range Data – T. Sahin
- 2008 - 2d Curve and 3d Surface Representation using Implicit Polinomials and its Applications – B. Zheng
- 2010 - Fast Accurate Implicit Polynomial Fitting Approach – M. Rouhani
- 2012 - Implicit Polynomial Representation Through a Fast Fitting Error Estimation – M. Rouhani
- 2013 - The Richer Representation the Better Registration – M. Rouhani

Gracias!

Fin