

Evaluación exacta de una clase de algoritmos de subdivisión no estacionarios.



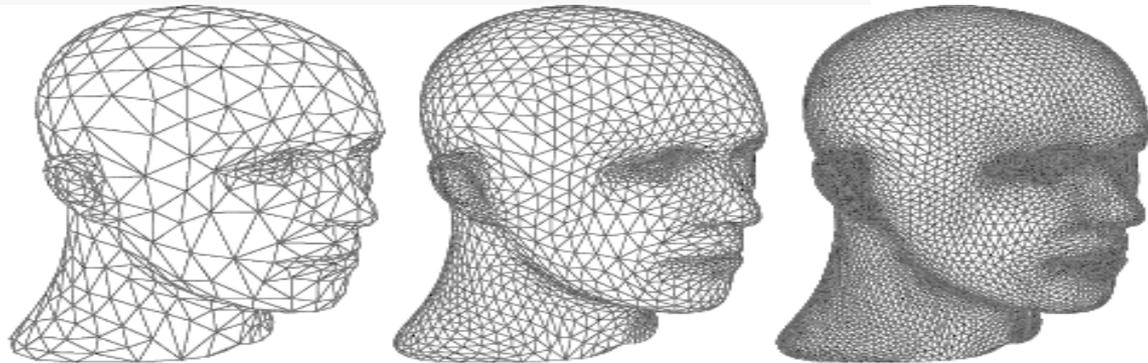
EMNO 2015

*Lucia Romani, Univ. de
Milano-Bicocca, Italia.
Jorge Estrada Sarlabous,
Victoria Hernández
Mederos, ICIMAF, Cuba.*



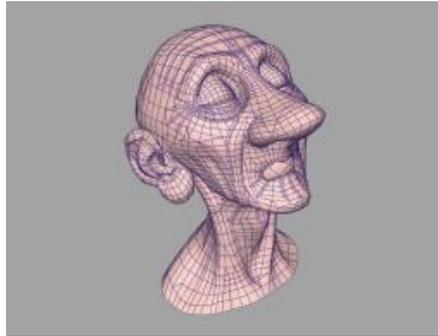


Esquemas de subdivisión (ES): algoritmos eficientes para generar iterativamente una sucesión de aproximaciones lineales (poligonales, mallas, etc.) que converge a una curva (superficie) *suave*.



Pueden ser estacionarios (ej.: ES B-spline polinomiales) o no-estacionarios (ej.: ES B-spline exponenciales).

Los algoritmos son tan sencillos, poco costosos e intuitivos que permiten su uso en modelación libre, en los juegos por PC y en las animaciones.



Sus generalizaciones han sido investigadas recientemente y han generado diferentes formas de obtener curvas límite con buenas propiedades:

- reproducción de secciones cónicas, de espirales, de funciones trigonométricas o hiperbólicas
- existencia de parámetros de tensión global, que permiten obtener curvas *suaves* controlando su forma y/o cuanto se aproxima al polígono de control



Recientemente, se ha puesto de manifiesto la potencialidad de usar ES en el contexto del *Análisis Isogeométrico* (AI), el cual intenta *integrar* al *FEM* a los sistemas *CAD*, usando *la misma base* de funciones para aproximar tanto la geometría del dominio como para aproximar las soluciones de las ecuaciones que se desean resolver.

Por el momento este vínculo ES-AI se ha restringido al uso de ES estacionarios, pues entre otras condiciones, se requiere tener la posibilidad de evaluar exactamente y con poco costo las curvas límite (y sus derivadas) en valores arbitrarios de los parámetros.

Para los ES *no* estacionarios conocidos en la literatura *no* se conocen algoritmos eficientes para evaluar exactamente la curva límite y sus derivadas.



Denotando por $P^{(0)} = \{P_i^{(0)} \in R^d, i \in Z\}$ a los vértices del polígono de control, un ES binario y lineal genera sucesiones cada vez más densas de puntos

$$P^{(k+1)} = \{P_i^{(k+1)} \in R^d, i \in Z\}$$

via las reglas de subdivisión

$$P_{2i+r}^{(k+1)} = \sum_{j \in Z} a_{2(i-j)+r}^{(k)} P_j^{(k)}, \quad r = 0, 1, \quad \forall k \in N_0 := N \cup \{0\}$$

Los coeficientes definen la **máscara de subdivisión** del nivel k

$$a^{(k)} = (\dots, a_{-1}^{(k)}, a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots), \quad a_i^{(k)} \in R \quad \forall i \in Z$$

El paso de la secuencia $P^{(k)}$ a la siguiente mas densa $P^{(k+1)}$

se realiza multiplicando la **matriz de subdivisión** de nivel k

$$S_{a^{(k)}} = \{S_{a^{(k)}}(i, j) = a_{i-2j}^{(k)}, i, j \in Z\}$$

con el vector columna $P^{(k)}$, de forma que

$$P^{(k+1)} = S_{a^{(k)}} P^{(k)}$$



El *esquema de subdivisión* (ES) consiste en la multiplicación por las matrices de subdivisión

$$S_{a^{(0)}}, \dots, S_{a^{(k)}}, \dots$$

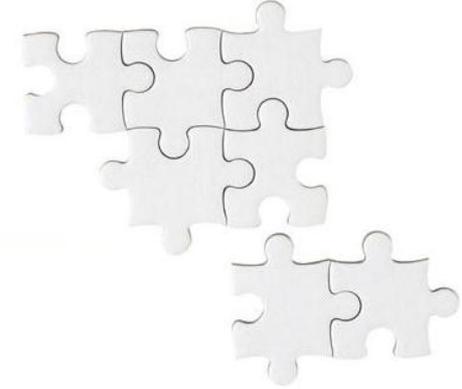
comenzando con $P^{(0)}$ y se denota como $\{S_{a^{(k)}}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$

Sea $F_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, d$ el spline lineal que interpola el j -ésimo elemento del polígono $P^{(k)}$ con el valor paramétrico

$$\xi_j^{(k)} = \{\xi_i^{(k)}, i \in Z : \xi_i^{(k)} < \xi_{i+1}^{(k)} \text{ and } \xi_{i+1}^{(k)} - \xi_i^{(k)} = 2^{-k}\}$$

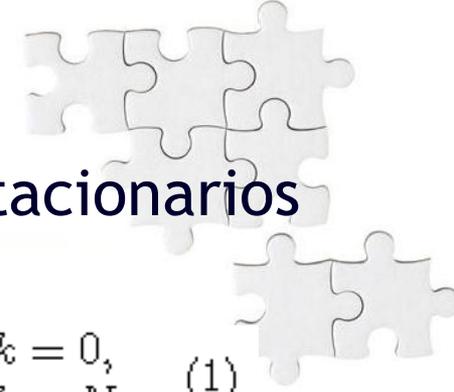
podemos definir el límite $\{S_{a^{(k)}}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ del ES para el j -ésimo elemento de $P^{(0)}$ como el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} F_j^{(k)}$

Siempre que tal límite exista, el ES se dice *convergente* y la curva límite se denomina la *curva de subdivisión* asociada al polígono $P^{(0)}$



Explotando la estructura especial de sus reglas de subdivisión, el ES no estacionario aproximante estudiado permite derivar *fórmulas cerradas* para la posición límite de los vértices de control, así como para las tangentes de la curva límite en estos puntos límite (vlr).

También se aportan algoritmos para lograr que la curva límite de este ES no uniforme aproximante *interpole* un conjunto de puntos y para calcular el *d-offset* de la curva límite.



Consideraremos la clase de ES univariados, no estacionarios aproximantes con máscara de nivel k

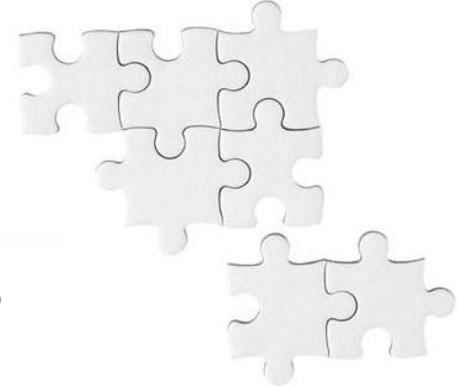
$$\mathbf{a}^{(k)} = \left(\frac{\alpha^{(k)}}{8}, \frac{1}{2}, \frac{4 - \alpha^{(k)}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\alpha^{(k)}}{8} \right) \quad \text{con} \quad \alpha^{(k)} \in \begin{cases} [0, 2) & \text{si } k = 0, \\ (0, 2) & \text{si } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (1)$$

Para todo k, la sucesión $P^{(k)}$ se transforma en $P^{(k+1)}$ via las reglas de subdivisión

$$P^{(k+1)} = S_{\mathbf{a}^{(k)}} P^{(k)}$$

Los ES con las máscaras (1) se llaman *esquemas EBCN*. Análogamente a los B-spline cúbicos, podemos describir la evolución del i-ésimo vértice inicial a través de la secuencia

$\{P_{2^k i}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ generada por el proceso de subdivisión.

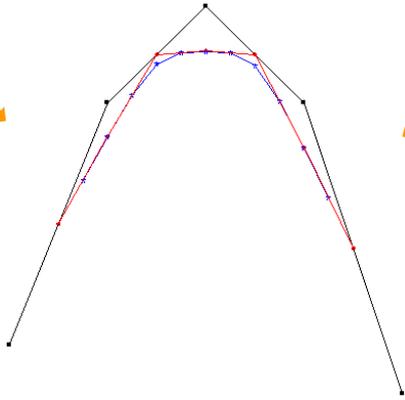
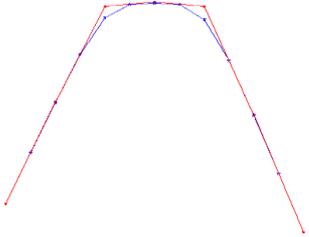
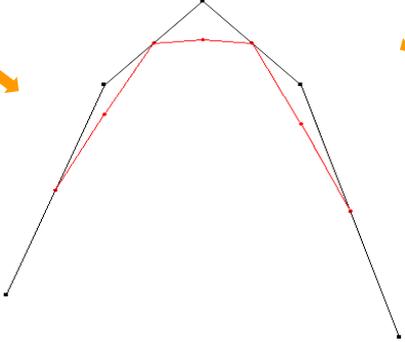
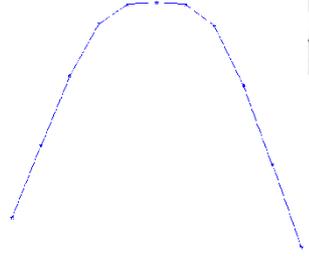
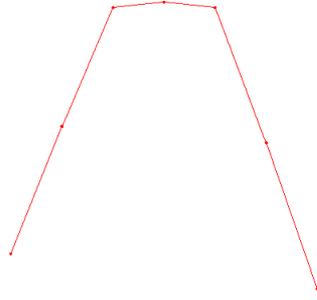
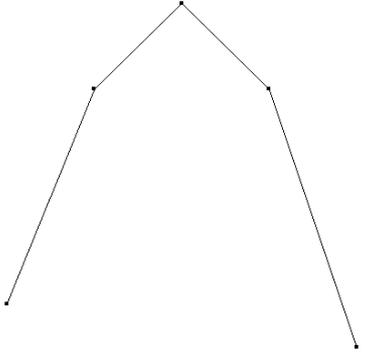
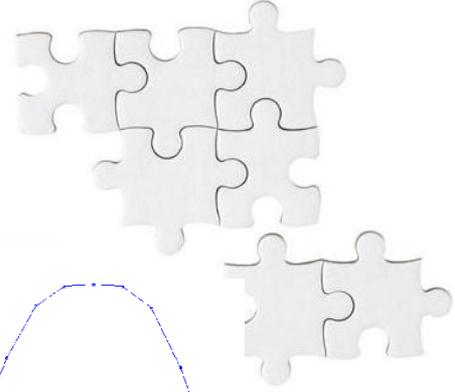


Obsérvese que aplicando iterativamente las reglas

$$P_{2^i}^{(k+1)} = \left(1 - \frac{\alpha^{(k)}}{4}\right) P_i^{(k)} + \frac{\alpha^{(k)}}{4} \left(\frac{P_{i-1}^{(k)} + P_{i+1}^{(k)}}{2}\right)$$
$$P_{2^{i+1}}^{(k+1)} = \frac{1}{2} (P_i^{(k)} + P_{i+1}^{(k)}).$$

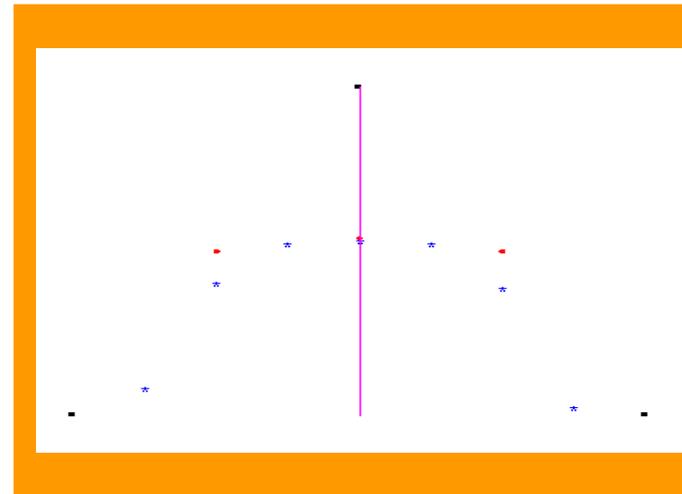
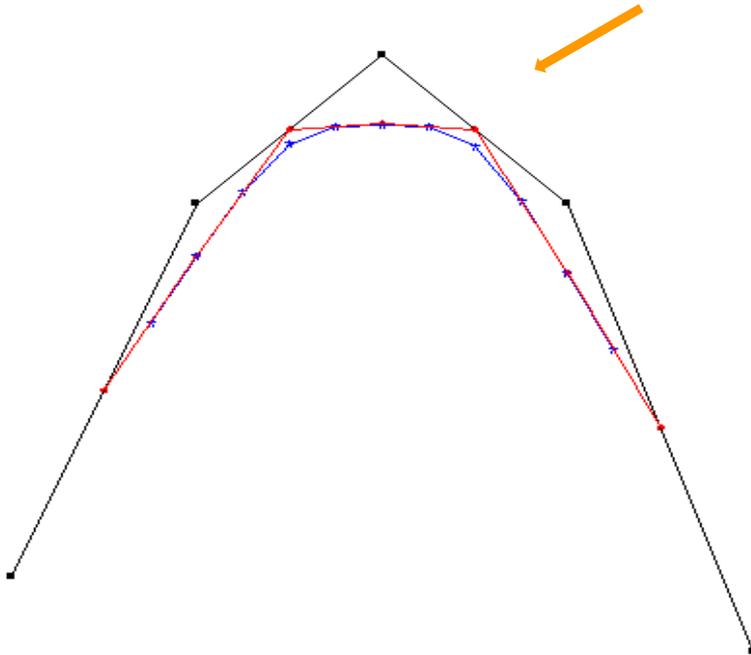
puede demostrarse que, para i fijo:

- los $\{P_{2^k i}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ se encuentran sobre una recta y
- para cada k , las secantes que unen al antecesor con el sucesor del vértice $2^k i$ -ésimo son paralelas



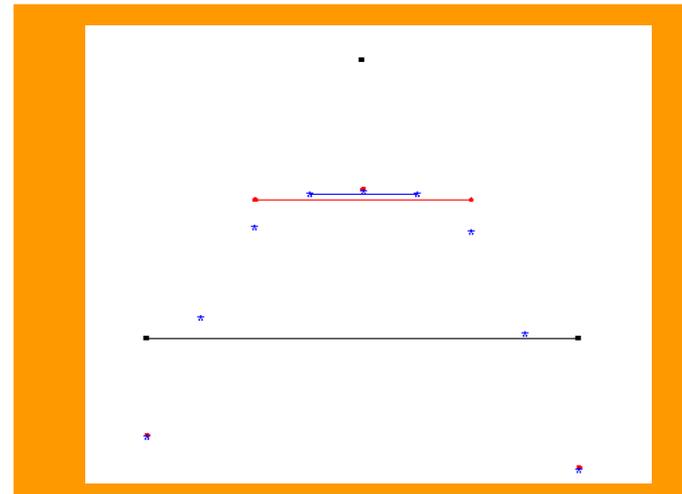
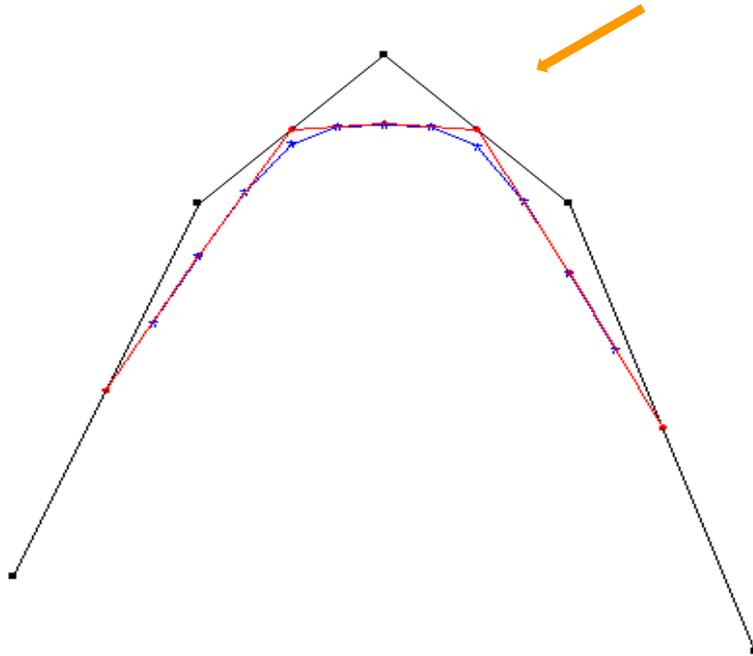


- Los puntos $\{P_{2^k}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ se encuentran sobre una recta





- Para cada k , las secantes que unen al antecesor con el sucesor del $2^k i$ -ésimo punto son paralelas





De aquí se pueden derivar dos resultados importantes. Se pueden dar fórmulas cerradas para calcular exactamente en cualquier valor paramétrico diádico racional:

- la posición del límite de la sucesión $\{P_{2^k i}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, en términos de la sucesión $\alpha^{(k)}$
- la pendiente de la curva límite en el punto límite de la sucesión $\{P_{2^k i}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$

Para precisar esto se requieren algunas notaciones...

Sea
$$M_{2^r i}^{(n)} := \frac{1}{2} (P_{2^{r i} - 1}^{(n)} + P_{2^{r i} + 1}^{(n)})$$

el punto medio del antecesor y el sucesor del vértice $2^k i$ -ésimo

Y sea
$$\gamma_0^{(k)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\prod_{\ell=0}^j \frac{2 - \alpha^{(\ell)}}{4} \right) + \prod_{\ell=0}^k \frac{2 - \alpha^{(\ell)}}{4}$$

Proposición 1.

$$P_{2^{k+1}i}^{(k+1)} = \gamma_0^{(k)} P_i^{(0)} + (1 - \gamma_0^{(k)}) M_i^{(0)}$$

Criterios de convergencia y suavidad (Charina et al, 2013)

- Si $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{(k)} = \alpha \in (0, 2)$, entonces el EBCN converge y produce curvas límite C^1 .
- Si $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha^{(k)} - 1| < \infty$, entonces el EBCN converge y produce curvas límite C^2 .

Ejemplos de EBCN



- Un ejemplo interesante de EBCN se obtiene para

$$\alpha^{(k)} = \frac{k + 2(1 - 2^{-(\nu+1)})}{2^\nu(k+1)} \quad \text{con } \nu \in \mathbb{R}^+.$$

Puesto que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{(k)} = \frac{1}{2^\nu} \in (0, 1)$, entonces este EBCN converge y produce curvas límite C^1

Este EBCN es una generalización no estacionaria de la conocida máscara de 5 elementos de Gori-Pitolli (2000)

$$\left(\frac{1}{2^{3+\nu}}, \frac{1}{2}, \frac{2^{2+\nu} - 1}{2^{2+\nu}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{3+\nu}} \right),$$

Ejemplos de EBCN



- Otro ejemplo de EBCN interesante se obtiene para

$$\alpha^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \frac{2}{1 + \cos(2^{-(k+1)} t)} & \text{con } t \in [0, \pi) \cup i\mathbb{R}^+, \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{si } k \in N \end{cases}$$

Puesto que $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha^{(k)} - 1| < \infty$, entonces el EBCN converge y produce curvas límite C^2 .

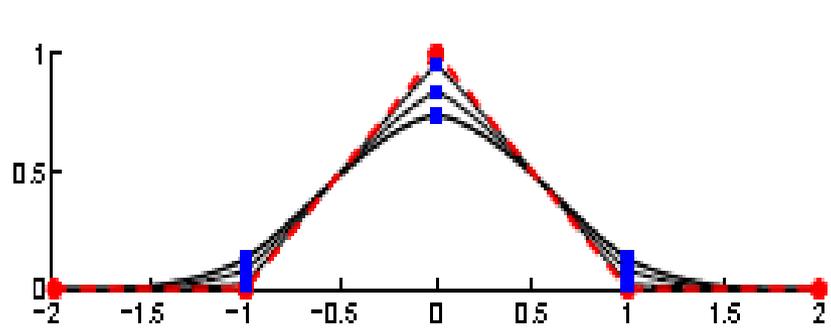
Este EBCN representa una generalización de la conocida máscara de 5 elementos de Conti et al (2007), aportándole el parámetro global de tensión t .



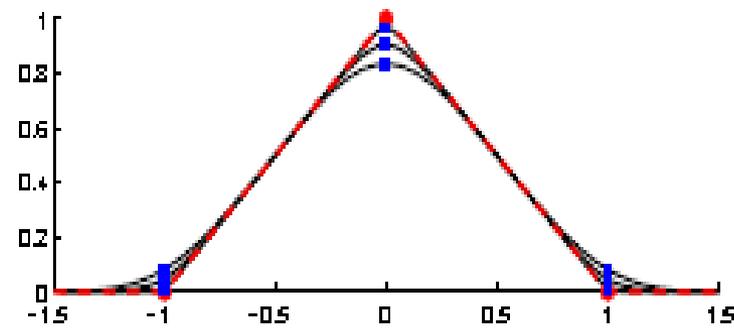
Funciones límite básicas obtenidas para los dos ejemplos de EBCN...

mostrando exactamente los puntos con parámetro -1, 0, 1, resp., calculados con la combinación lineal

$$\frac{1 - \gamma_0^{(\infty)}}{2}, \gamma_0^{(\infty)}, \frac{1 + \gamma_0^{(\infty)}}{2} \quad \text{con} \quad \gamma_0^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_0^{(k)},$$



(a)



(b)

Funciones límite básicas obtenidas aplicando los EBCN al polígono δ (rojo discontinuo):

- (a) EBCN-GP con $v = 1$ (abajo), $v = 2$ (medio), $v = 4$ (arriba);
- (b) EBCN-C2 con $t = i$ (abajo), $t = 10 i$ (medio), $t = 30 i$ (arriba).

Aplicaciones: Interpolación

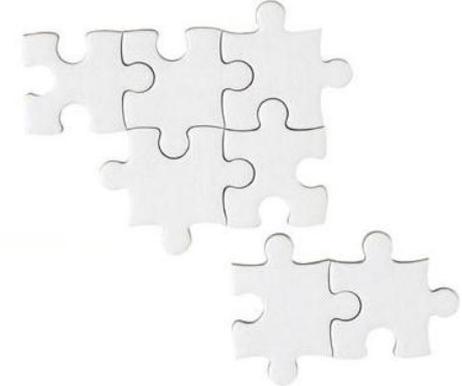


En CAGD existen dos formas de interpolar los vértices de un polígono Q dado con curvas de subdivisión:

- (i) usando reglas de subdivisión, tales que cada refinamiento de un polígono contiene entre sus vértices a los vértices del polígono anterior;
- (ii) escogiendo convenientemente el polígono inicial, de forma que la curva límite del esquema aproximante interpola al polígono Q .

No se han encontrado en la literatura aplicaciones de (ii) para el caso **no** estacionario.

Proposición 2.



- Sean

$$Q = \{Q_r, r = 0, \dots, n-1\}$$

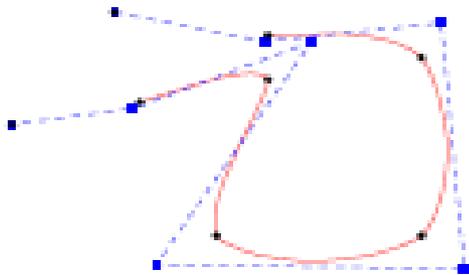
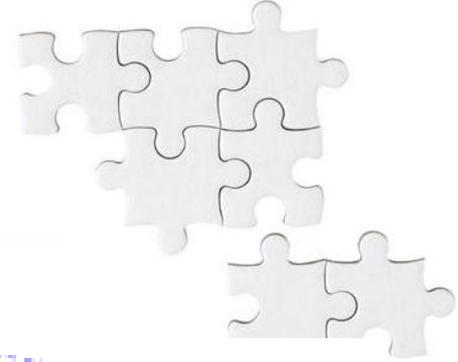
los vértices de un polígono cerrado y consideremos un EBCN convergente, entonces la curva límite obtenida aplicando las reglas de subdivisión al polígono inicial

$$P^{(0)} = \{P_r^{(0)}, r = -1, \dots, n+1\}$$

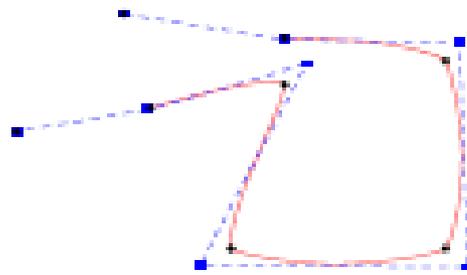
$$P_r^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} Q_j \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{2\pi\ell(j-r)}{n}\right)}{(1 - \omega_\ell) \gamma_0^{(\infty)} + \omega_\ell}, \quad r = 0, \dots, n-1$$

donde $\omega_\ell = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(n-1)\ell}{n}\right) \right)$, $\gamma_0^{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_0^{(k)}$,
y $P_{-1}^{(0)} = P_{n-1}^{(0)}$, $P_n^{(0)} = P_0^{(0)}$, $P_{n+1}^{(0)} = P_1^{(0)}$,

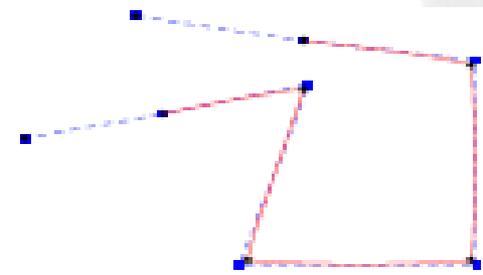
es una curva de subdivisión cerrada que interpola a todos los puntos de Q .



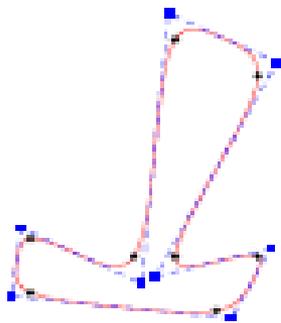
(a) $v = 1$



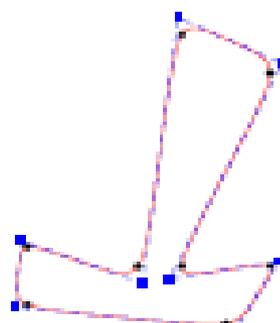
(b) $v = 2$



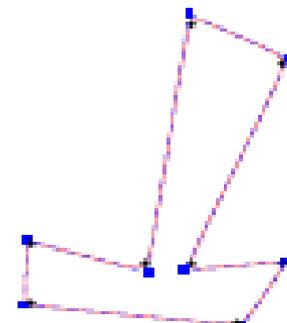
(c) $v = 4$



(d) $t = i$



(e) $t = 8i$

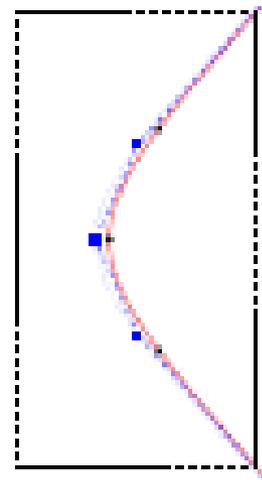
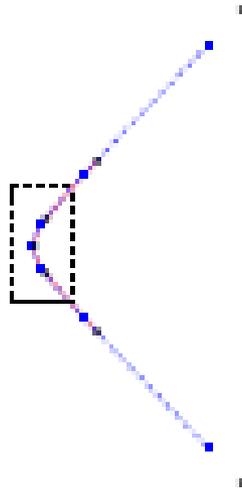
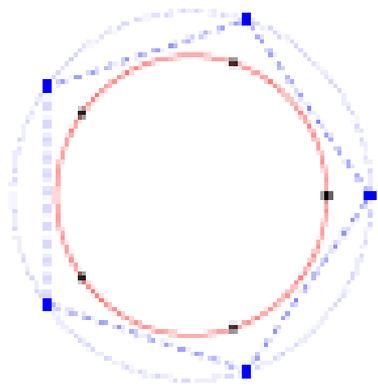
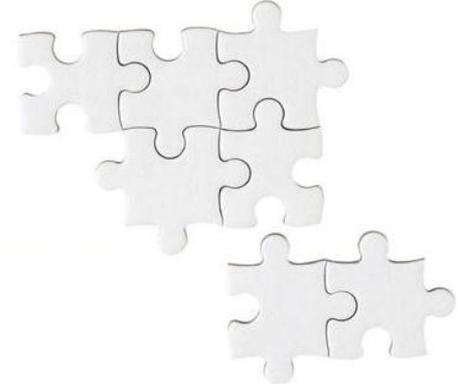


(f) $t = 16i$

Curvas de subdivisión interpolando los puntos de Q (círculos) y polígonos de control asociados $P^{(0)}$ (cuadrados):

(a) EBCN-GP (arriba) con $v = 1, 2, 4$;

(b) EBCN-C2 (abajo), con $t = i, 8i, 16i$.



Círculo unitario e hipérbola equilátera obtenidos aplicando EBCN-C2 al correspondiente polígono de control $P^{(0)}$ (línea discontinua) que fue calculado a partir de los vértices de $Q^{(0)}$ (círculos) :

(izquierda) : EBCN-C2 con $t = \frac{2\pi}{5}$

(derecha): EBCN-C2 con $t = i$

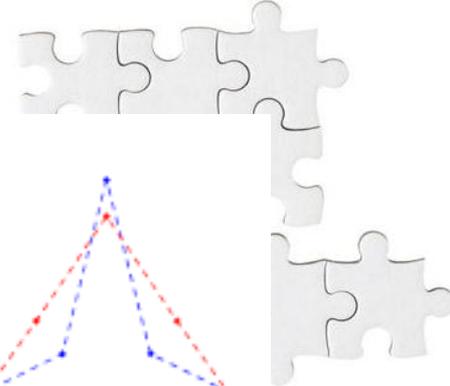
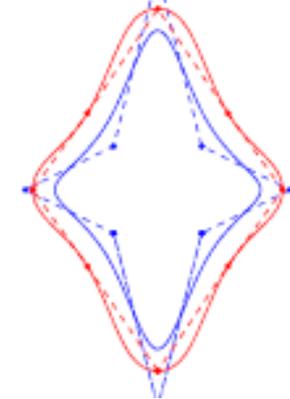
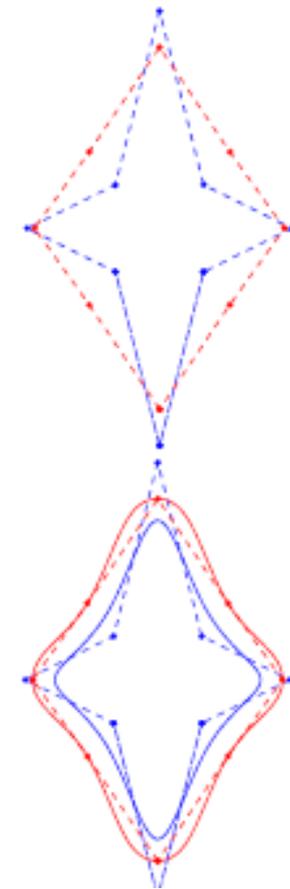
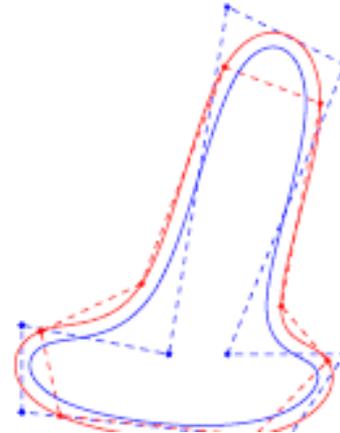
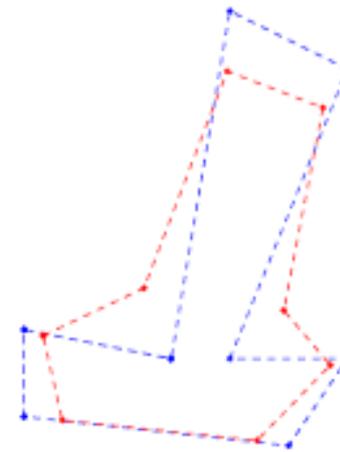
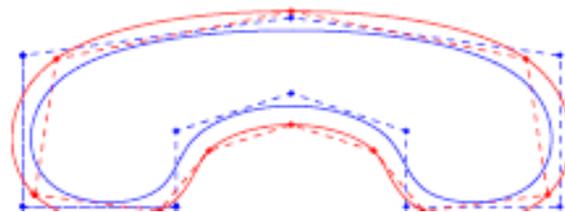
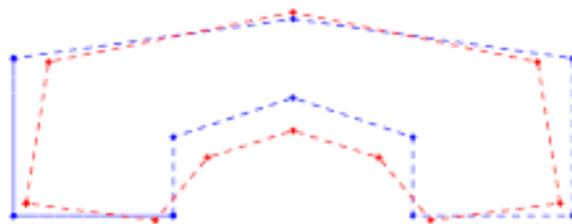
Aplicaciones: Offset



La curva d-offset de una curva plana C es el lugar geométrico de los puntos que están a distancia d de C

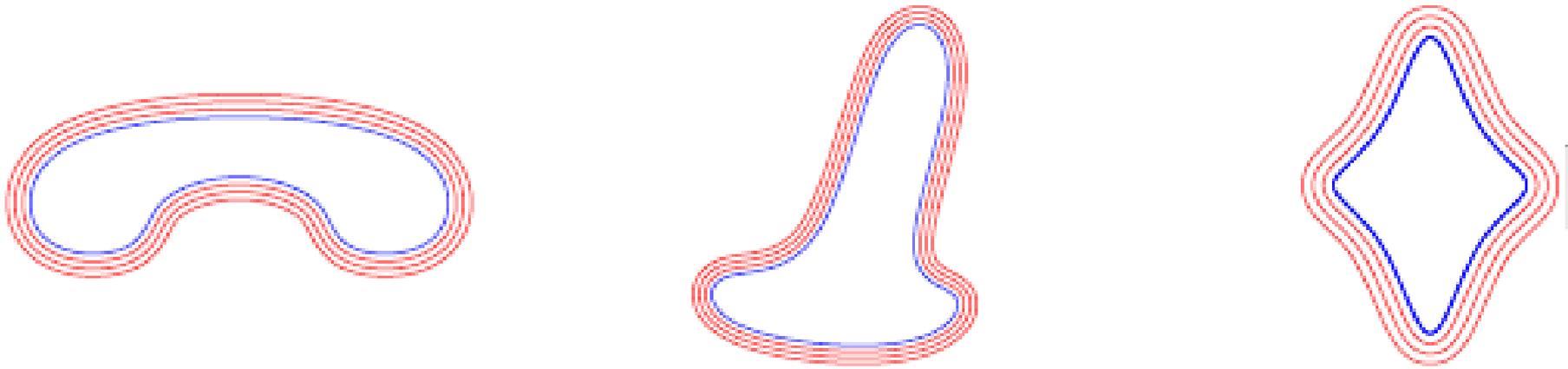
Si C es la curva límite de aplicar un EBCN C^1 -continuo al polígono de control $P^{(0)}$, podemos generar una sucesión de poligonales $\{Q^{(k)}\}$ que converge a la curva d-offset de C como sigue:

- Para $k \geq 0$, calcular $P^{(k)}$
- Para cada vértice $P_i^{(k)}$, calcular para $r \rightarrow \infty$, la posición límite $P_{2^r i}^{(k+r)}$, $C_i^{(k)}$
- Para cada punto sobre la curva límite $C_i^{(k)}$, calcular el vector tangente normalizado de C en $C_i^{(k)}$, $t_i^{(k)}$
- Asignar $Q_i^{(k)} := C_i^{(k)} + d n_i^{(k)}$, con $n_i^{(k)}$ ortogonal a $t_i^{(k)}$



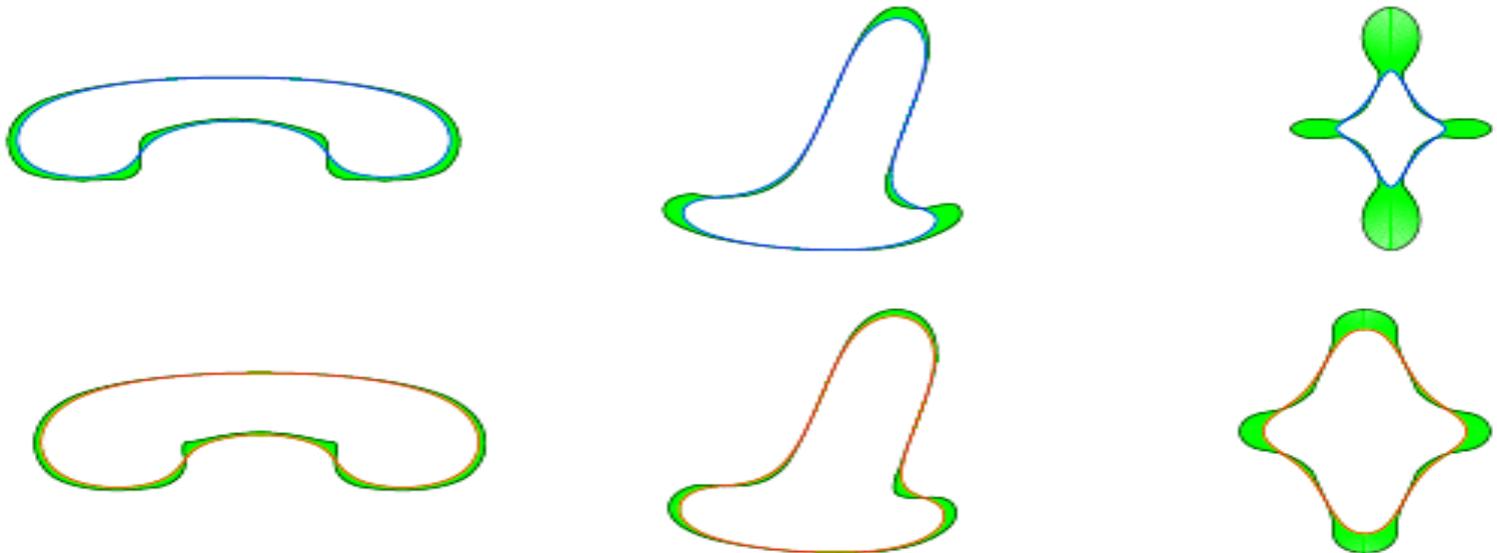
2 1

Arriba: Polígono inicial $P^{(0)}$ (azul) y polígono inicial del d-offset $Q^{(0)}$ (rojo).
 Abajo: curva límite C (azul) y curva límite de su curva d-offset (rojo).



- Arriba: Curvas d-offset para diferentes valores de d

- Abajo: (fila superior) peine de curvatura de las curvas, (fila inferior) peine de curvatura de las curvas offset correspondientes



Conclusiones



Se obtuvieron *fórmulas explícitas* para el cálculo de la posición límite de los vértices de control y sus tangentes de EBCN de las que se derivan las siguientes ventajas:

- *Interpolación* de un conjunto de puntos con ES aproximantes no estacionarios
- Cálculo eficiente de las *curvas offset exactas* de curvas de subdivisión aproximantes y no estacionarias
- Reproducción de *secciones cónicas*, propiedad requerida en el diseño libre

Esperamos que estos resultados sirvan de base teórica para *extender* el uso de ES no estacionarios a otros escenarios, en particular al *Análisis Isogeométrico*.

Referencias

- ROMANI, L. (2012) Convexity preserving interpolatory subdivision with conic precision. *Appl. Math. Comput.*, 219, 4049-4066.
- BARENDRECHT, P.J. (2013) Isogeometric Analysis for Subdivision Surfaces. MSc Thesis, Eindhoven University of Technology.
- CHARINA, M., CONTI, C., GUGLIELMI, N. & PROTASOV V. (2013) Non-stationary multivariate subdivision: joint spectral radius and asymptotical similarity. *Oberwolfach Preprints*, 20, http://www.mfo.de/scientificprogramme/publications/owp/2013/OWP2013_20.pdf
- CONTI, C., GORI, L. & PITOLLI, F. (2007) Totally positive functions through nonstationary subdivision schemes. *J. Comput. Appl. Math.*, 200, 255-265.
- GORI, L. & PITOLLI, F. (2000) A class of totally positive refinable functions. *Rend. Mat.*, Serie VII, Vol. 20, 305-322.
- HERNANDEZ MEDEROS, V., ESTRADA SARLABOUS, J. & IVRISSIMTZIS, I. (2013) Generalization of the incenter subdivision scheme. *Graphical Models*, 75, 79-89.
- OKANIWA, S., NASRI, A., LIN, H., ABBAS, A., KINERI, Y. & MAEKAWA, T. (2012) Uniform B-spline curve interpolation with prescribed tangent and curvature vectors. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 18(9), 1474-1487.