# Sobre la estabilidad de esquemas de diferencias finitas para la ecuación de advección en regiones planas irregulares.

**J. G. Tinoco-Ruiz**, F. J. Domínguez-Mota, G. Tinoco-Guerrero

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
EDIFICIO B, CIUDAD UNIVERSITARIA, MORELIA, C.P. 58060

21-01-2015
IV Encuentro Cuba-México de Métodos Numéricos y Optimización

# Outline

# La Ecuación de Advección

## ¿Qué es la Ecuación de Advección?

Si una sustancia esta siendo transportada en un fluido a una velocidad constante $a$, la función de flujo puede escribirse como

$$f(u) = au.$$

Considerando que $f$ y $u$ son ambas funciones suaves, para conocer el total de masa que pasa entre dos puntos $x_1$ y $x_2$, podemos hacerlo calculando

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t))\right]dx = 0$$

# La Ecuación de Advección

## La Ecuación de Advección

Como la integral debe de ser 0 para todos los valores de $x_1$ y $x_2$, quiere decir que

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x,t)) = 0,$$

y como en el problema de advección, $f(u(x)) = au(x)$, entonces se puede reescribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + a\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0,$$

que es la ecuación de advección en $1+1D$. Ésta puede ser escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

# La Ecuación de Advección

## La Ecuación de Advección en $2+1D$

Para obtener la expresión de la ecuación de advección en $2+1D$, seguimos un proceso similar. Si consideramos ahora,

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial x}f(u(x,y,t))+\frac{\partial}{\partial y}f(u(x,y,t))\right]dydx=0$$

y ahora tenemos que $f(u(x))=au(x)$ y $f(u(y))=bu(y)$, llegaremos a obtener

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}+a\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}+b\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}=0$$

o, en aras de la simplicidad,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

# Outline

# Ecuación de advección

## Lax-Wendroff en $1+1$D

El esquema de Lax-Wendroff para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

se puede obtener a partir de la expansión de $u$ en serie de Taylor hasta segundo orden

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t)^2$$

y utilizando la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales de $u$ con respecto de $t$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

después sustituimos las derivadas parciales para obtener

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) - a\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta t)^2$$

# Ecuación de advección

## Lax-Wendroff en $2+1$D

De manera similar, para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

usando la expansión de $u$ en serie de Taylor

$$u(x,y,t+\Delta t) = u(x,y,t) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t)^2$$

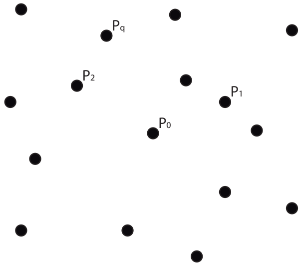
usando nuevamente la regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

podemos obtener

$$\begin{aligned} u(x,y,t+\Delta t) &= u(x,y,t) \\ + \quad & \left[-\Delta t\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] \end{aligned}$$

# Outline




### El enfoque de diferencias finitas

Queremos aproximar el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F \quad (1)$$

en el punto $p_0$, utilizando aproximaciones de los valores de $u$ en algunos de sus vecinos.

# Diferencias finitas directas

## El enfoque de diferencias finitas

Un esquema de diferencias finitas en el punto $p_0$ es una aproximación al lado derecho de (1),

$$L_0 = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \cdots + \Gamma_q u(p_q). \tag{2}$$

Este esquema es consistente si

$$[Lu]_{p_0} - L_0 \to 0$$

cuando $p_1, \ldots, p_q \to p_0$.

# ¿Cómo hacemos para elegir los coeficientes $\Gamma$?

## Expansión de Taylor

Utilizando los primeros seis términos de la expansión de Taylor, hasta segundo orden, de $u$ en el punto $p_0$, de la condición de consistencia se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \ldots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \ldots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \ldots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \ldots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \ldots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Tenemos que notar que este sistema tiene 6 ecuaciones y $q+1$ incógnitas; esto quiere decir que en la mayoría de los casos no está bien determinado.

## Outline

# Aproximación de la ecuación de advección

## El objetivo

Consideremos el problema de obtener, una aproximación a la solución del problema de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad [0, T] \times \Omega$$

$$u(x, y, 0) = g(x, y)$$

$$u(x, y, t)|_{S_1} = h(x, y, t)$$

donde $\Omega$ es un dominio plano simplemente conexo; y $\partial\Omega$ es un polígono de Jordan orientado de manera positiva, de tal manera que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$.

# Aplicando el esquema definido

## Aplicando al operador lineal

El esquema definido por la ecuación (3) se puede aplicar al operador

$$-\Delta t\left(a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

## Un esquema explícito de Lax-Wendroff

Los coeficientes $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_q$ obtenidos definen el esquema modificado de Lax-Wendroff

$$u_0^{k+1}=u_0^k+\sum_{l=0}^{q}\Gamma_l(u_0,\ldots,u_q)u_l^k, \tag{4}$$

donde $k$ representa el nivel de tiempo.

# Extendiendo la idea

## Un esquema implícito de Lax-Wendroff

Utilizando el esquema explícito definido en (4), y ahora agregando un parametro $\lambda$ para utilizar un nuevo nivel de tiempo, podemos obtener

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} + \lambda[\sum_{k=0}^{q} \Gamma_k(u_0, ..., u_q)u_k^n] + (1-\lambda)[\sum_{k=0}^{q} \Gamma_k(u_0, ..., u_q)u_k^{n+1}] \quad (5)$$

que es la versión implícita de nuestro esquema.

# Outline

# Estabilidad. Método Explícito.

## Al estilo Von Neumann

$$u_{p_0}^{k+1} = u_{p_0}^{k} + \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l u_{p_l}^{k}$$

Error:

$$\Phi_{m,n}^{k} = A^k e^{i(rx_m+sy_n)}$$

$$A^{k+1} e^{i(rx_m+sy_m)} = A^k e^{i(rx_m+sy_n)} + \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l A^k e^{i(r(x_m+\Delta x_p^l)+s(y_n+\Delta y_p^l))}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l e^{i[r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l]} \\ &= 1 + \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l \cos(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) + i \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l \sin(r(\Delta_x)_l + s(\Delta y)_l) \end{aligned}$$

# Estabilidad. Método Explícito.

## Usemos condiciones de consistencia

Como

$$\cos(r(\Delta x)_0 + s(\Delta y)_0) = 1$$

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 - \Gamma_2 - \cdots - \Gamma_q,$$

y

$$\sin(r(\Delta x)_0 + s(\Delta y)_0) = 0$$

Entonces

$$A = 1 + \sum_{l=1}^{q} \Gamma_l[\cos(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) - 1] + i \sum_{l=1}^{q} \Gamma_l \sin(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l)$$

# Estabilidad. Método Explícito.

## Usemos condiciones de consistencia

Ahora hasta segundo orden,

$$\begin{aligned} \cos(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) - 1 &= -[r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l]^2/2! \\ &= -[r^2(\Delta x)_l^2 + 2rs(\Delta x)_l(\Delta y)_l + s^2(\Delta)_l^2]/2! \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{q} \Gamma_l[\cos(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) - 1] &= -[\frac{r^2}{2}\sum_{l=1}^{q}\Gamma_l(\Delta x)_l^2 + rs\sum_{l=1}^{q}\Gamma_l(\Delta x)_l(\Delta y)_l + \frac{s^2}{2}\sum_{l=1}^{q}\Gamma_l(\Delta y)_l^2] \\ &= -[\frac{r^2}{2}(\Delta t)^2 a^2 + rs(\Delta t)^2 ab + \frac{s^2}{2}(\Delta t)^2 b^2] \\ &= -\frac{(\Delta t)^2}{2}[r^2 a^2 + 2rsab + s^2 b^2] \\ &= -\frac{(\Delta t)^2}{2}(ar + bs)^2 \end{aligned}$$

# Estabilidad. Método Explícito.

## Usemos condiciones de consistencia

De la misma forma

$$\sin(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) = r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l + \mathcal{O}(\Delta x^3, \Delta y^3)$$

nos lleva a

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{q} \Gamma_l \sin(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) &= r\sum_{l=1}^{q} \Gamma_l (\Delta x)_l + s\sum_{l=1}^{q} \Gamma_l (\Delta y)_l \\
&= -ar\Delta t - bs\Delta t \\
&= -(ar + bs)\Delta t
\end{aligned}$$

# Estabilidad. Método Explícito.

## Malas Noticias

Por tanto

$$\begin{aligned} \mid A \mid^2 &= [1 - \frac{(\Delta t)^2}{2}(ar + bs)^2]^2 + (ar + bs)^2(\Delta t)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4}(\Delta t)^4(ar + bs)^4 > 1 \end{aligned}$$

Y el esquema es condicionalmente inestable.

# Estabilidad. Método Implícito.

## Intentemos con el Implícito

$$u_{p_0}^{k+1} = u_{p_0}^{k} + \lambda \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l u_{p_l}^{(k)} + (1-\lambda) \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l u_{p_l}^{(k+1)}$$

$$\Phi = A^k e^{i(rx_m + sy_n)}$$

$$A^{k+1} e^{i(rx_m+sy_n)} = A^k e^{i(rx_m+sy_n)} + [\lambda + (1-\lambda)A] \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l A^k e^{i[r(x_m+\Delta x_p^l)+s(y_n+\Delta y_p^l)]}$$

$$A = 1 + [\lambda + (1-\lambda)A] \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l e^{i[r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l]}.$$

# Estabilidad. Método Implícito.

## Usemos otra vez condiciones de consistencia

Como ya vimos

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l e^{i[r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l]} \\
&= \sum_{l=0}^{q} \Gamma_l [\cos(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l) + i \sin(r(\Delta x)_l + s(\Delta y)_l)] \\
&= -\frac{1}{2}(\Delta t)^2(ar + sb) - i(\Delta t)(ar + sb)
\end{aligned}
$$

Se tiene

$$
A = \frac{1 + \lambda H}{1 + (\lambda - 1)H}
$$

# Estabilidad. Método Implícito.

## Factor de Amplificación. ! Buenas Nuevas!

Por tanto

$$| A |^2 = \frac{1 - \lambda(\Delta t)^2(ar+sb)^2 + \frac{1}{4}\lambda^2(\Delta t)^4(ar+sb)^4 + \lambda^2(\Delta t)^2(ar+sb)^2}{1 - (\lambda-1)(\Delta t)^2(ar+sb)^2 + \frac{1}{4}(\lambda-1)^2(\Delta t)^4(ar+sb)^4 + (\lambda-1)^2(ar+sb)^2}$$

Para tener $| A | \leq 1$

$$\lambda \leq \frac{8 + (\Delta t)^2(ar+sb)^2}{8 + 2(\Delta t)^2(ar+sb)^2}$$

- El lado derecho varía entre $\frac{1}{2}$ y 1
- Si se escoge $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ el esquema será incondicionalmente estable (en este análisis hasta segundo orden).
- En particular $\lambda = \frac{1}{2}$ (Estilo Crank-Nicholson).

# Outline

# Conclusiones

## De manera aproximada (hasta segundo orden):

- El Esquema Explícito es condicionalmente inestable: Como pasa en EDF clásicos.
- Esquemas tipo Crank-Nicholson son condicionalmente estables: Igual que en EDF clásicos
- No es necesario tener mallas estructuradas, basta con nubes de puntos.

## Trabajo Futuro

Hacer análisis de estabilidad para otras ecuaciones.

## Gracias por su atención