

Esquemas generalizados de diferencias finitas sobre mallas convexas para la solución de ecuaciones diferenciales parciales en regiones irregulares del plano

F. Domínguez-Mota, J. G. Tinoco-Ruiz
y G. Tinoco-Guerrero

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
EDIFICIO "B", CIUDAD UNIVERSITARIA, MORELIA, C.P. 58040

IV Encuentro Cuba-México de Métodos Numéricos y Optimización,
24.01.15



Outline

- 1** **Introducción y motivación**
- 2 Diferencias más generales
- 3 Ejemplos de aplicación
- 4 Un par de teoremas
- 5 Conclusiones

Objetivo

Objetivo

En esta plática, presentamos un esquema generalizado de diferencias finitas y su aplicación a mallas para regiones irregulares del plano. Mostramos en particular cómo dicho esquema puede ser usado como una alternativa a los elementos finitos lineales en triángulos.

Hechos

Hecho

Las diferencias finitas han sido ampliamente usadas durante un largo rato y, hoy día, siguen siendo la alternativa más usada en la investigación y en la industria.

Fórmulas estándar útiles

Para el caso rectangular $2D$, for $-\nabla^2 u = g$, tenemos:

$$(u_{xx} + u_{yy})_{ij} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

donde h es el tamaño de paso.

Hechos

Hecho

Las diferencias finitas han sido ampliamente usadas durante un largo rato y, hoy día, siguen siendo la alternativa más usada en la investigación y en la industria.

Fórmulas estándar útiles

Para el caso rectangular $2D$, for $-\nabla^2 u = g$, tenemos:

$$(u_{xx} + u_{yy})_{ij} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

donde h es el tamaño de paso.

Diferencias en mallas rectangulares

Sistema discreto

Al discretizar obtenemos el sistema $Kv = f$, donde

$$K = \begin{pmatrix} T & -I & & \dots & 0 \\ -I & T & -I & & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0\dots & & -I & T \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0\dots & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

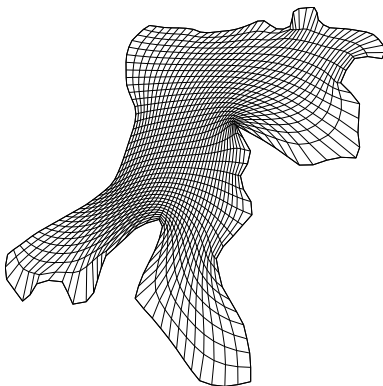
Hechos

- La discretización de $-\nabla^2 u = g$ sobre $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ usando diferencias finitas produce un sistema lineal $Kv = f$ cuya matriz de coeficientes K es simétrica, positiva definida, invertible.
- Se conocen expresiones explícitas para los valores y vectores propios de K .
- Se conocen cotas superiores útiles para $\|K^{-1}\|$ que permiten probar convergencia.

Outline

- 1 Introducción y motivación
- 2 Diferencias más generales**
- 3 Ejemplos de aplicación
- 4 Un par de teoremas
- 5 Conclusiones

¿Qué tal si queremos resolver $-\nabla(\Lambda\nabla u) = g$ en este dominio Ω ?



Se requieren (Godunov):

- Una discretización apropiada del operador diferencial.
- Una discretización apropiada de Ω .

Avances en generación de mallas

Estado del arte



Discretizaciones apropiadas: diferencias finitas en mallas generales

Esquemas directos en DF

Para mostrar cómo aproximar $-\nabla(\Lambda\nabla u) = g$, consideremos el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F. \quad (1)$$

EL problema que nos interesa es el diseño de esquemas en diferencias cuando el dominio Ω de Lu tiene forma irregular.

Diferencias generales

Un esquema de diferencias finitas en p_0 es una combinación lineal de los valores (aproximados) de u en los nodos $p_0, p_1, p_2, \dots, p_q$:

$$\hat{L}(p_0) = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \dots + \Gamma_q u(p_q).$$

Un esquema es consistente si $[Lu]_{p_0} - \hat{L}(p_0) \rightarrow 0$ as $p_1, \dots, p_q \rightarrow p_0$.

Implicaciones

Expansión de Taylor

La expansión de $[Lu]_{p_0} - L_0$ (hasta orden 2) usando q puntos alrededor de p_0 está dada por

$$\begin{aligned}
 & [Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu]_{p_0} - \sum_{i=0}^q \Gamma_i u(p_i) = \\
 & \left(F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \right) u(p_0) + \left(D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \right) u_x(p_0) + \\
 & \left(E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta y_i \right) u_y(p_0) + \left(A(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} \right) u_{xx}(p_0) + \\
 & \left(B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_i \right) u_{xy}(p_0) + \left(C(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} \right) u_{yy}(p_0) + \\
 & \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta y_i\})^3
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de los coeficientes

Condiciones sobre los coeficientes Γ_i

Para un en nodo p_0 y sus q vecinos se satisfaga la definición de consistencia, la expansión de Taylor implica que cumplirse

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Observemos que hay 6 ecuaciones y $q + 1$ incógnitas.

Esquema heurístico

Sistema reducido

Consideramos el sistema de las últimas 5 ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Buscamos una solución $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$. Denotamos (3) como $M\Gamma = \beta$.

Resolvemos el sistema

$$M^T M \Gamma = M^T \beta \quad (4)$$

para obtener $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$. Enseguida, el coeficiente Γ_0 se obtiene de la condición de consistencia $\Gamma_0 = F(p_0) - \Gamma_1 \dots - \Gamma_q$.

Outline

- 1 Introducción y motivación
- 2 Diferencias más generales
- 3 Ejemplos de aplicación**
- 4 Un par de teoremas
- 5 Conclusiones

Problema

Problema tipo Poisson

$$\nabla \cdot (\Lambda \nabla f(x, y)) = g(x, y)$$

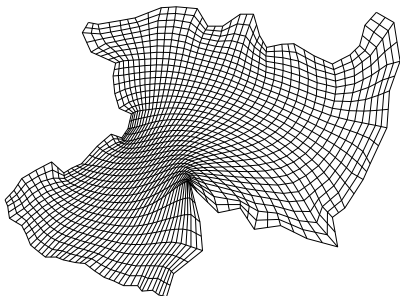
where

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = P^{-1}DP,$$

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{bmatrix}.$$

Solución en forma cerrada: $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

Ejemplo 1: solución en una malla estructurada



Tamaño	error l_2	Orden
21×21	6.1494E-04	
41×41	1.5843E-04	2.03
81×81	3.9553E-05	2.04

Ejemplo 2: Crank-Nicolson

Crank-Nicolson

Una vez que contamos con un esquema para aproximar $Lu = \nabla^2 u$, podemos proponer un esquema no estacionario. Para resolver la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u, \quad (5)$$

sobre un dominio espacial irregular, podemos usar la discretización \hat{L} del lado derecho (5). Esto nos da

$$\frac{v_{i,j}^{(n+1)} - v_{i,j}^{(n)}}{\Delta t} = \frac{\nu}{2} \left(\hat{L}(v_{i,j}^{(n+1)}) + \hat{L}(v_{i,j}^{(n)}) \right), \quad (6)$$

donde $v_{i,j}^{(n)}$ es la aproximación a u en $(n\Delta t, x_{i,j}, y_{i,j})$ con $p_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$.

Ejemplo 3: Crank-Nicolson

Problema

Para el ejemplo, consideramos la función

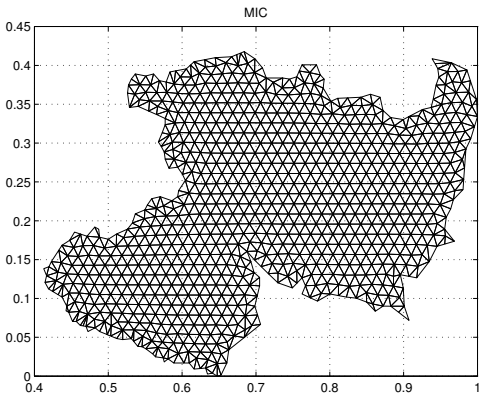
$$u(t, x, y) = e^{-2\pi^2 \nu t} \cos(\pi x) \cos(\pi y); \quad (7)$$

Las condiciones inicial y a la frontera se eligieron para que $u(t, x, y)$ sea la solución exacta.

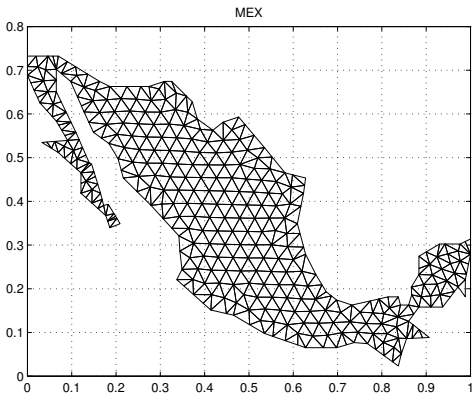
Malla	N	$\ u^N - U^N\ _2$	\mathcal{O}
HAB	41	8.733E-04	
HAB	81	2.474E-04	1.95
MIC	41	9.035E-04	
MIC	81	2.442E-04	1.97

Table : Errores cuadráticos y órdenes de convergencia en $T = 1$.

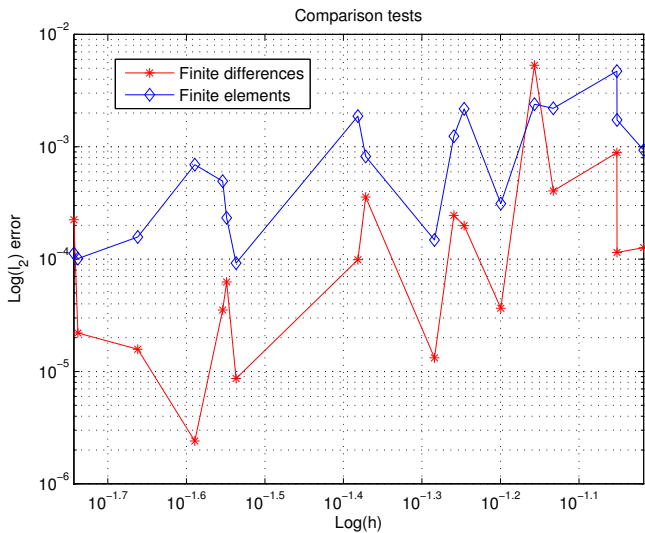
Ejemplo 3: mallas no estructuradas



Ejemplo 3: mallas no estructuradas



Ejemplo 3: solución en mallas no estructuradas



Resumen cerca del fin de la plática

Quote

Citando a Samarskii: “la forma del dominio se refleja directamente en las propiedades de la matriz del sistema obtenido por la discretización del operador de Laplace”.

Hechos

- La discretización empleando las diferencias generalizadas produce un sistema de ecuaciones cuyos coeficientes reflejan la geometría del dominio y la mallas que se construyó.
- En el caso de $-\nabla(K\nabla u) = g$ en un dominio irregular Ω se obtiene un sistema $Kv = f$ donde K no es simétrica.
- Expresiones (¿Cotas?) para los valores y vectores propios de K dependen de la malla.
- Se requieren cotas para $\|K^{-1}\|$ A fin de probar convergencia.

Outline

- 1 Introducción y motivación
- 2 Diferencias más generales
- 3 Ejemplos de aplicación
- 4 Un par de teoremas**
- 5 Conclusiones

Poisson

Theorem

Sea K la matriz de coeficientes asociada a la discretización del operador de Laplace sobre Ω usando el esquema definido por (3). Si K es una L -matriz y $\Omega \in [a, b] \times [a, b]$, entonces el vector de error $E = u - v$ donde u se evalúa en los puntos de la malla G satisface

$$\|E\| \leq Qe^{2(b-a)}Nh^3$$

donde N es el número de puntos de la malla, h es la norma de G y Q es una constante que depende de Ω y u .

Theorem

Si G se refina de tal forma que Nh sea acotada superiormente, entonces

$$\|E\| = \mathcal{O}(h^2),$$

i.e. el esquema en diferencias definido por (3) es convergente.

Difusión (Crank-Nicolson)

Theorem

Sea K la matriz de coeficientes asociada a la discretización del operador de Laplace sobre Ω usando el esquema definido por (3). Si K es una L-matriz, es diagonalmente dominante, y $\Omega \in [a, b] \times [a, b]$, entonces el esquema

$$\frac{v_{i,j}^{(n+1)} - v_{i,j}^{(n)}}{\Delta t} = \frac{\nu}{2} \left(\hat{L}(v_{i,j}^{(n+1)}) + \hat{L}(v_{i,j}^{(n)}) \right)$$

es incondicionalmente estable.

Outline

- 1 Introducción y motivación
- 2 Diferencias más generales
- 3 Ejemplos de aplicación
- 4 Un par de teoremas
- 5 Conclusiones**

Conclusiones y trabajo a futuro

Pros

- El esquema propuesto puede ser usado como una alternativa *razonable* a los elementos finitos lineales en triángulos.
- El esquema puede extenderse para emplear condiciones de Neuman a la frontera.

Contras

- Las cotas para garantizar convergencia y estabilidad dependen fuertemente en la geometría de la malla y son desconocidas *a priori*. Hay que repensar el mallado.
- Los teoremas anteriores no son aplicables en todas las mallas para regiones irregulares (aunque experimentalmente se logran resultados muy satisfactorios).

Conclusiones y trabajo a futuro

Por hacer

- La teoría está lejos de alcanzar la madurez. Se requieren análisis basados en otras herramientas (SVD, M-teoría, etc.).
- Implementar rutinas para usar mallas con elementos curvos y nodos sobre los puntos medios de las aristas de los elementos.

Muchas gracias por su atención.