

# Restauración de imágenes desenfocadas con filtro separable mediante regularización de Tikhonov

Iván Méndez Cruz  
Pablo Barrera Sánchez

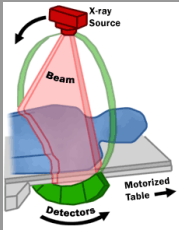
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias

19 de enero del 2015

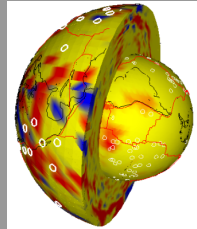
# Guión

1. Problemas discretos mal planteados
2. Modelo para desenfoque
3. Regularización de problemas de gran escala
4. Restauración de imágenes desenfocadas
5. Conclusiones

## Problemas



Tomografía médica



Geofísica



Procesamiento del habla



Restauración de imágenes

## Problemas mal planteados

### Problema bien planteado

- tiene solución
- la solución es única
- la solución depende continuamente de los datos

De otro modo, problema mal planteado



## Problemas discretos mal planteados

### Problema:

Dados  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  
hallar  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax = b$

Características:

- los valores singulares  $s_i$  decaen a 0
- los vectores singulares  $u_i$  cumplen

Condición Discreta de Picard:

$|u_i^T b|$  decae en promedio más rápido que  $s_i$

$$x = \sum_i \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

## Problemas discretos mal planteados

### Ejemplo: Ecuación integral discretizada

Hallar  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_0^1 K(s, t)f(t)dt = -\frac{\sin(15\pi s)}{225\pi^2}, \quad 0 \leq s \leq 1$$

donde

$$K(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & s < t, \\ t(s-1), & s \geq t. \end{cases}$$

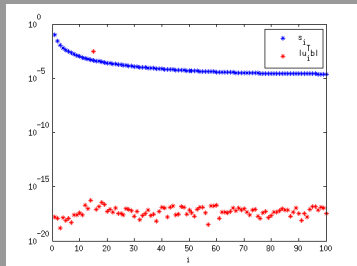
**Discretización:** colocación + cuadratura

$$\sum_{j=1}^{100} \underbrace{\frac{1}{100} K\left(\frac{2i-1}{200}, \frac{2j-1}{200}\right)}_A \underbrace{f\left(\frac{2j-1}{200}\right)}_x = \underbrace{-\frac{1}{225\pi^2} \sin\left(\frac{3(2i-1)\pi}{40}\right)}_b$$

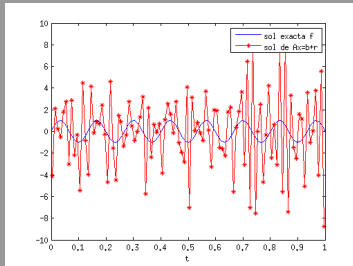
$A$  de orden 100,  $\text{cond}(A) \approx 4053.2$

## Problemas discretos mal planteados

### Ejemplo: Ecuación integral discretizada



Condición Discreta de Picard



Gráfica de solución exacta y de la solución de  $Ax = b + r$

Solución exacta:  
 $f(t) = \sin(15\pi t)$

## Métodos de regularización numérica

- Regularización de Tikhonov

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|x\|_2^2$$

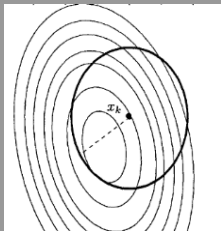
- Problema de región de confianza

$$\min_{\|x\|_2 \leq \delta} \|Ax - b\|_2^2$$

- Mínimos cuadrados con restricción cuadrática

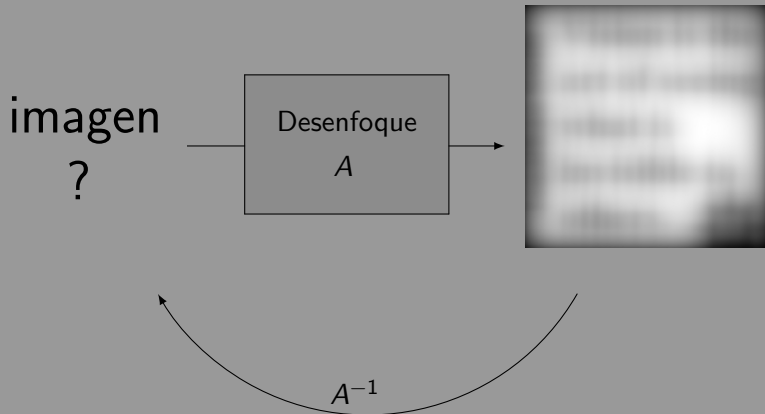
$$\min_{\|Ax - b\|_2^2 \leq \alpha^2} \|x\|_2^2$$

Usa CG en Problema de región de confianza





## Restauración de imágenes desenfocadas



# Modelo para desenfoque

Modelo lineal y discreto

$$Ax = b$$

$x$  : datos de imagen digital

$b$  : datos de imagen desenfocada

¿Cómo formar el sistema lineal?

¿Qué usa para desenfocar la imagen?

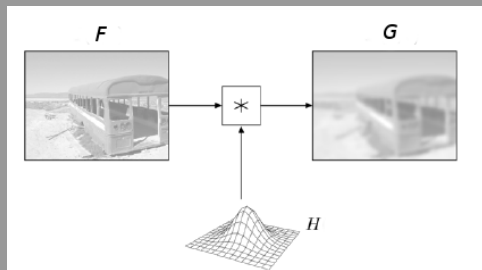
## Desenfoque

- filtro
- condiciones de frontera

# Filtros

Filtro gaussiano:

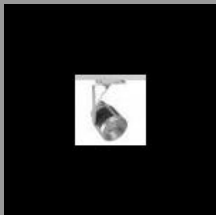
Convolución



$$h_{i,j} = e^{-\sigma(i^2+j^2)}$$

- lineal
- espacialmente invariante

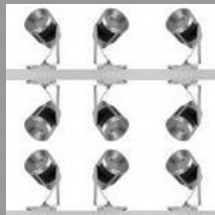
## Condiciones de frontera



cero



periódica



reflexiva

## Modelo lineal para desenfoque

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

imagen original

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

gaussiana

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

imagen desenfocada

Convolución + condición de frontera cero

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_{22} & h_{12} & 0 & h_{21} & h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{32} & h_{22} & h_{12} & h_{31} & h_{21} & h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{32} & h_{22} & 0 & h_{31} & h_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \hline h_{23} & h_{13} & 0 & h_{22} & h_{12} & 0 & h_{21} & h_{11} & 0 \\ h_{33} & h_{23} & h_{13} & h_{32} & h_{22} & h_{12} & h_{31} & h_{21} & h_{11} \\ 0 & h_{33} & h_{23} & 0 & h_{32} & h_{22} & 0 & h_{31} & h_{21} \\ \hline 0 & 0 & 0 & h_{23} & h_{13} & 0 & h_{22} & h_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{33} & h_{23} & h_{13} & h_{32} & h_{22} & h_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{33} & h_{23} & 0 & h_{32} & h_{22} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ g_{13} \\ g_{23} \\ g_{33} \end{bmatrix}$$

A

x

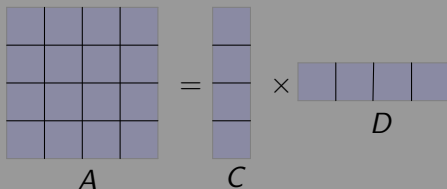
b

Toeplitz por bloques

## Problemas de gran escala

$A$  de tamaño  $m \times n$  con  $m, n \gg 1$

¿podemos reducir las dimensiones del problema?



**Hipótesis:** El filtro es separable, esto es,  $h_{ij} = h_i h_j$ .

↪

Producto de Kronecker

$$A = C \otimes D$$

De otro modo,

$$A \approx \sum_i C_i \otimes D_i$$

## Regularización y producto de Kronecker

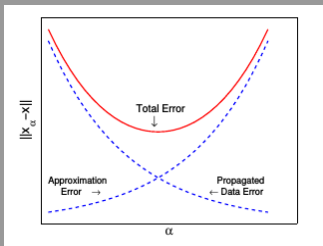
### SVD de $A = C \otimes D$

$$\begin{aligned} C &= U_c \Sigma_c V_c^T \\ D &= U_d \Sigma_d V_d^T \end{aligned} \implies A = \underbrace{(U_c \times U_d)}_U \underbrace{(\Sigma_c \otimes \Sigma_d)}_\Sigma \underbrace{(V_c \otimes V_d)}_V^T$$

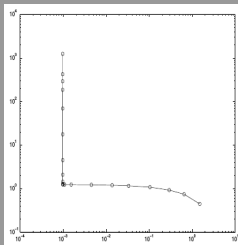
### Hallar la solución regularizada de Tikhonov $x_\alpha$ de $Ax = b$

1. calcula SVDs de  $C$  y  $D$
2. reacomoda  $b$  en una matriz  $B$  y calcula  $H = U_D^T B U_C^T$
3. forma  $H_\alpha$ : producto de  $H$  con factores  $\frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha^2}$
4. calcula  $V_d H_\alpha V_c^T$  y apila columnas

## Elección del parámetro de regularización



- Principio de discrepancia
- GCV
- Criterio de la L-Curva



*esquina* de  $(\log \|b - Ax_\alpha\|, \log \|x_\alpha\|)$   
 punto de mayor curvatura



## Restauración



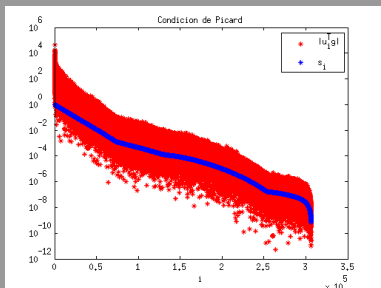
Problema: Hallar  $x$  tal que  $Ax = b$ .

- imagen desenfocada con ruido  $\rightarrow b$
- desenfoque  $\rightarrow A$
- $x \rightarrow$  imagen restaurada

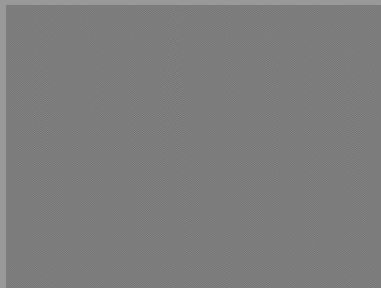
# Restauración

**Hipótesis:** filtro gaussiano + condiciones de frontera cero

$\hookrightarrow A = C \otimes D$ ,  $C$  y  $D$  de Toeplitz



Condición Discreta de Picard



Pseudo inversa

¡Regulariza la solución!

# Restauración con regularización de Tikhonov

solución regularizada  $x_\alpha$



$\alpha = 0.01$



$\alpha = 0.001$



$\alpha = 10^{-4}$



$\alpha = 4.8065 \times 10^{-5}$

## Restauración con regularización de Tikhonov



imagen desenfocada



$\alpha = 0.001$

## Restauración con SVD truncada

solución regularizada  $x_k$



$k = 7700$



$k = 45000$



$k = 120000$



$k = 200000$

## Restauración con SVD truncada



imagen desenfocada



$k = 45000$

## Restauración de imágenes



imagen desenfocada



imagen restaurada con  
regularización de Tikhonov,  
parámetro  $\alpha = .0005$

## Conclusiones y trabajo futuro

- Buscar si problemas de gran escala poseen alguna estructura que nos permita ahorrar trabajo y aplicar técnicas sencillas.
- Trabajar problemas de región de confianza para conseguir la solución regularizada.



## Referencias I



R.C. Gonzalez, J.G. Nagy, R.E. Woods.  
*Deblurring Images: matrices, spectra and filtering.*  
Prentice Hall, 2002.



M. Hanke, P.C. Hansen.  
*Regularization methods for large-scale problems.*  
*Surv. of Math. Ind.* **3**, pp. 253-315, 1993.



P.C. Hansen.  
*Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems.*  
SIAM, 1988.



P.C. Hansen, J.G. Nagy, D.P. O'Leary.  
*Deblurring Images: matrices, spectra and filtering.*  
SIAM, 2006.



S.I. Kabanikhin  
Definitions and Examples of Inverse and Ill Posed Problems  
*Journal of Inv. Ill-Posed Problems*, Vol 16, pp. 317-357, 2008.

## Referencias II



M. Rojas

Regularization of Large Scale Ill-conditioned Least squares Problems, 1996.



D.P. O'Leary.

*Scientific Computing with Case Studies.*

SIAM, 2008.



J. Kamm, J.G. Nagy

Kronecker products and SVD approximations for separable spatially variant blurs, 1998.



M. M. Sondhi, J. R. Resnick

The inverse problem for the vocal tract: Numerical methods, acoustical experiments, and speech synthesis

*Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 73, No. 3, pp. 985-1002, 1983.