

Parametrización de una región plana irregular por medio un mapeo B-spline bicuadrático y armónico

Isidro A. Abelló Ugalde¹⁻³; Pablo Barrera Sánchez¹
Victoria Hernández Mederos²; Guilmer González Flores¹

¹Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
UNAM, México

²Departamento de Matemática
Instituto de Cibernética, Matemática y Física, La Habana

³Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior,
Universidad de La Habana

IV Encuentro Cuba-México MNO, La Habana 2015

Outline

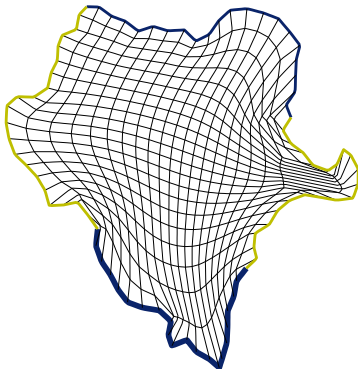
- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - Regiones de prueba irregulares
 - Ejemplos sobre regiones reales

Outline

- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - Regiones de prueba irregulares
 - Ejemplos sobre regiones reales

Solución de PDE en regiones irregulares

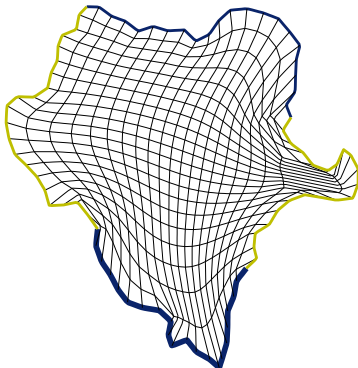
Malla ε -convexa



Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Solución de PDE en regiones irregulares

Malla ε -convexa

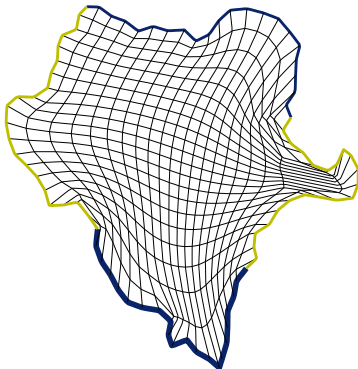


Dificultades

Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Solución de PDE en regiones irregulares

Malla ε -convexa



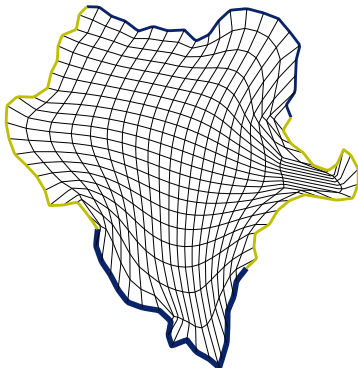
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Dificultades

- Modelar la frontera

Solución de PDE en regiones irregulares

Malla ε -convexa



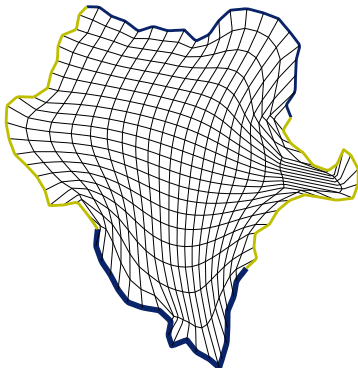
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Dificultades

- Modelar la frontera
- Mallar estructuradamente la región

Solución de PDE en regiones irregulares

Malla ε -convexa



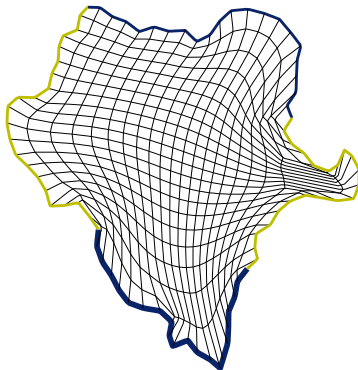
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Dificultades

- Modelar la frontera
- Mallar estructuradamente la región
- Refinar la malla

¿Cómo enfrentar las dificultades?

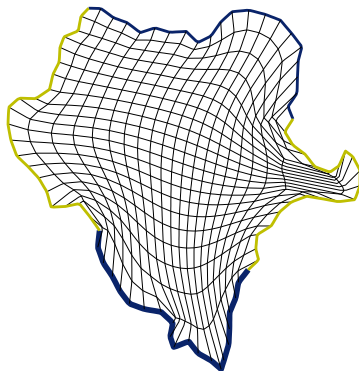
Malla ϵ -convexa



**Resolver ecuaciones diferenciales en
derivadas parciales
sobre regiones irregulares**

¿Cómo enfrentar las dificultades?

Malla ϵ -convexa

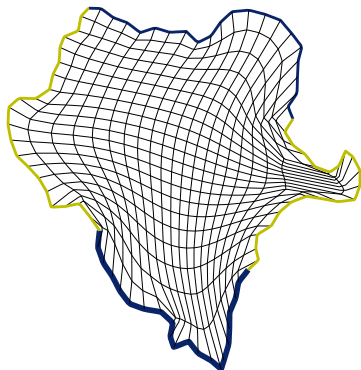


Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Objetivos

¿Cómo enfrentar las dificultades?

Malla ϵ -convexa



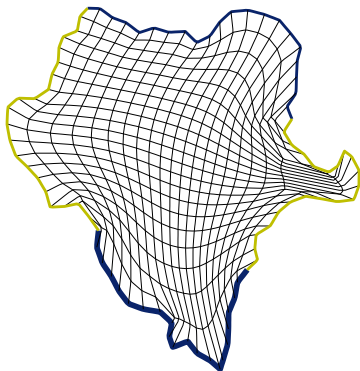
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Objetivos

- Contar con un mapeo **explícito** de la región Ω

¿Cómo enfrentar las dificultades?

Malla ϵ -convexa



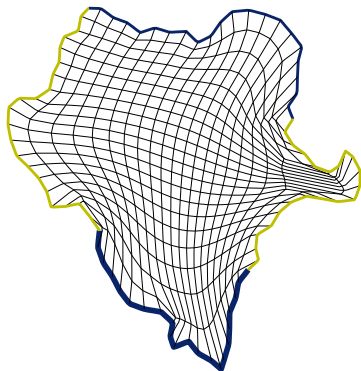
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Objetivos

- Contar con un mapeo **explícito** de la región Ω
- Que el mapeo sea sencillo

¿Cómo enfrentar las dificultades?

Malla ϵ -convexa



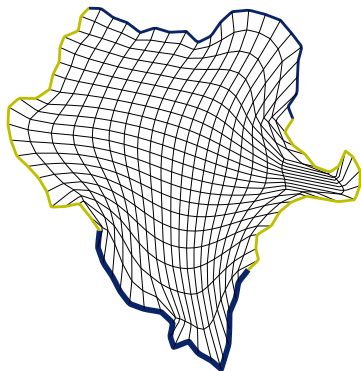
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Objetivos

- Contar con un mapeo **explícito** de la región Ω
- Que el mapeo sea sencillo
- Que sea suave

¿Cómo enfrentar las dificultades?

Malla ϵ -convexa



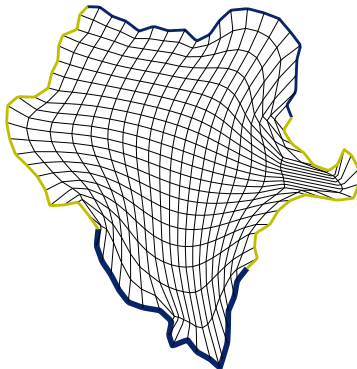
Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

Objetivos

- Contar con un mapeo **explícito** de la región Ω
- Que el mapeo sea sencillo
- Que sea suave
- Que se conecte con la solución de la ecuación diferencial.

Temas Relacionados

Malla ϵ -convexa



Resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre regiones irregulares

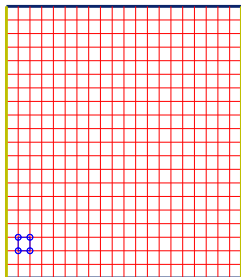
- Teoría de Mallas Estructuradas
- Análisis Isogeométrico
- Modelación de regiones planas y de superficies
- B-Splines y NURBS

Outline

- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - Regiones de prueba irregulares
 - Ejemplos sobre regiones reales

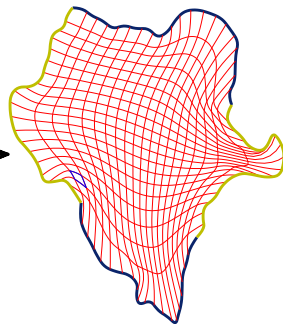
Caraterísticas del mapeo

Malla de Nodos y parche de parametros



$$X(\xi, \eta)$$

Malla B-Spline y Parche B-Spline



Mapeo B-Spline Bicuadrático. Definición

$$\mathbf{x} : [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (\mathbf{x}|_{\partial[0;1]^2} : \longrightarrow \partial\Omega)$$

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(\eta)$$

Mapeo B-Spline Bicuadrático. Definición

$$\mathbf{x} : [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (\mathbf{x}|_{\partial[0;1]^2} \longrightarrow \partial\Omega)$$

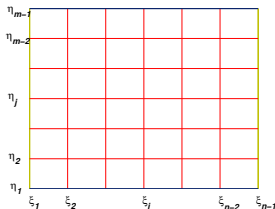
$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(\eta)$$

- $(\xi, \eta) \in \Omega_0 = [0; 1]^2$ espacio paramétrico

Existe una partición del espacio

$$0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} = 1$$

$$0 = \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{m-1} = 1$$



Mapeo B-Spline Bicuadrático. Definición

$$\mathbf{x} : [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (\mathbf{x}|_{\partial[0;1]^2} \longrightarrow \partial\Omega)$$

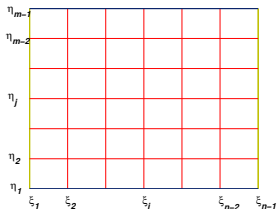
$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(\eta)$$

- $(\xi, \eta) \in \Omega_0 = [0; 1]^2$ espacio paramétrico

Existe una partición del espacio

$$0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} = 1$$

$$0 = \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{m-1} = 1$$



- $G_c = \{P_{i,j} \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$



Mapeo B-Spline Bicuadrático. Definición

Continuación

$$\mathbf{x} : [0; 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(\eta)$$

- $B_i^3(\xi)$ i-ésima Base B-spline de orden 3 para la sucesión de nodos

$$t^\xi = (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_{n-1}, \xi_{n-1})$$

- $B_j^3(\eta)$ j-ésima Base B-spline de orden 3 para la sucesión de nodos

$$t^\eta = (\eta_1, \eta_1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-2}, \eta_{m-1}, \eta_{m-1}, \eta_{m-1})$$

Bases B-Splines de orden 3. Fórmula recursiva

Formada por polinomios de segundo grado a pedazos

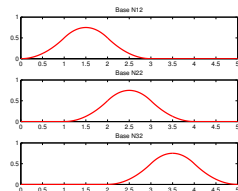
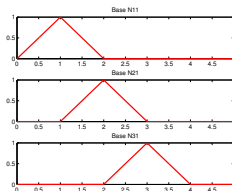
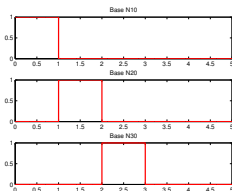
- Bases B-Spline:

- $$B_{i,t^\xi}^1(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i^\xi \leq \xi < t_{i+1}^\xi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- $$B_{i,t^\xi}^p(\xi) = \frac{\xi - t_i^\xi}{t_{i+p}^\xi - t_i^\xi} B_{i,t^\xi}^{p-1}(\xi) + \frac{t_{i+p}^\xi - \xi}{t_{i+p}^\xi - t_{i+1}^\xi} B_{i+1,t^\xi}^{p-1}(\xi)$$

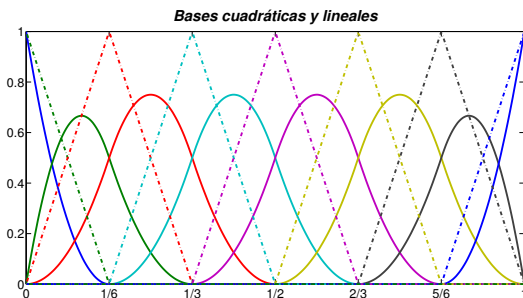
- $p = 3$: polinomios cuadráticos a pedazos

- t^ξ es la sucesión de nodos



Bases B-Splines: Algunas Propiedades

Caso concreto



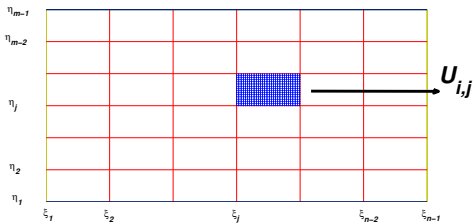
Nodos: $t^\xi = (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_{n-1}, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+3}$

- Soporte compacto
- En $[\xi_i; \xi_{i+1}]$ solo $B_i^3(\xi)$, $B_{i+1}^3(\xi)$, $B_{i+2}^3(\xi) \neq 0$
- n bases cuadráticas, $n+1$ bases lineales
- Caso bivariado es producto tensorial del univariado

Mapeo B-Spline bicuadrático restringido

Consecuencia de las propiedades de las bases

En el parche: $U_{i,j} = \{(\xi, \eta) \mid \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, \eta_j \leq \eta \leq \eta_{j+1}\}$,



$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(\xi, \eta)|_{U_{i,j}} &= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m P_{r,s} B_r^3(\xi) B_s^3(\eta) \\
 &= \sum_{r=i}^{i+2} \sum_{s=j}^{j+2} P_{r,s} B_r^3(\xi) B_s^3(\eta)
 \end{aligned}$$

Derivadas parciales del mapeo cuadrático

Derivadas de las bases de orden 3

Derivada de la $B_{i,t^\xi}^3(\xi)$

$$\frac{dB_i^3(\xi)}{d\xi} = 2 \left(\frac{B_i^2(\xi)}{t_{i+2}^\xi - t_i^\xi} - \frac{B_{i+1}^2(\xi)}{t_{i+3}^\xi - t_{i+1}^\xi} \right)$$

Derivada de la $B_{j,t^\eta}^3(\eta)$

$$\frac{dB_j^3(\eta)}{d\eta} = 2 \left(\frac{B_j^2(\eta)}{t_{j+2}^\eta - t_j^\eta} - \frac{B_{j+1}^2(\eta)}{t_{j+3}^\eta - t_{j+1}^\eta} \right)$$

Derivada parcial \mathbf{x}_ξ

$$\mathbf{x}_\xi = \sum_{r=i}^{i+2} \left(\sum_{s=j}^{j+2} P_{r,s} B_s^3(\eta) \right) \frac{dB_r^3(\xi)}{d\xi}$$

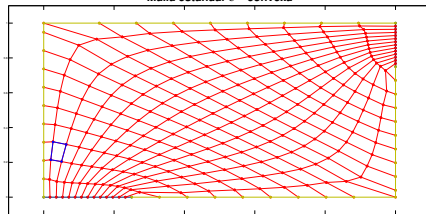
Derivada parcial \mathbf{x}_η

$$\mathbf{x}_\eta = \sum_{s=j}^{j+2} \left(\sum_{r=i}^{i+2} P_{r,s} B_r^3(\xi) \right) \frac{dB_s^3(\eta)}{d\eta}$$

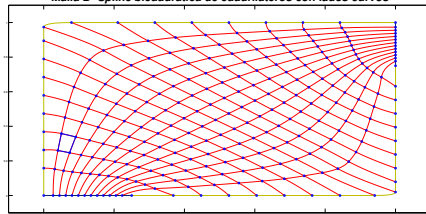
Mapeos B-Spline Bilineal y Bicuadrático. Ejemplos

Cuadriláteros ϵ -convexos y cuadriláteros de lados curvos

Malla estándar ϵ -convexa



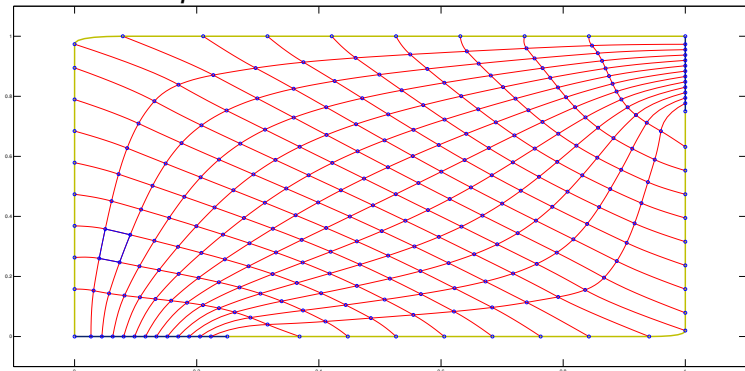
Malla B-Spline bicuadrática de cuadriláteros con lados curvos



Mapeo B-Spline Bicuadrático.

Ampliación de malla de cuadriláteros de lados curvos

Malla B-Spline bicuadrática de cuadriláteros con lados curvos



Outline

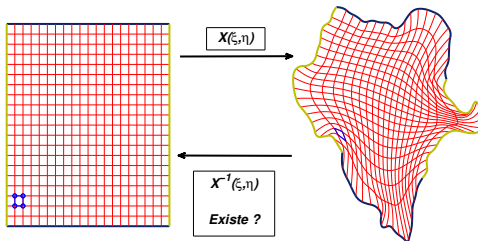
- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - Regiones de prueba irregulares
 - Ejemplos sobre regiones reales

Existencia del mapeo inverso

Teoría de funciones armónicas

Malla de Nodos y parche de parámetros

Malla B-Spline y Parche B-Spline

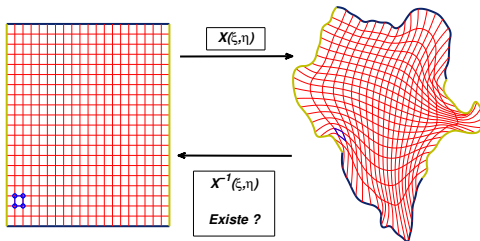


Existencia del mapeo inverso

Teoría de funciones armónicas

Malla de Nodos y parche de parámetros

Malla B-Spline y Parche B-Spline



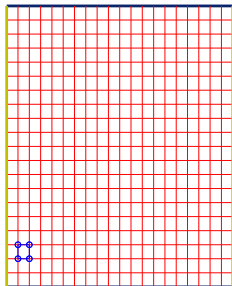
Si, por el teorema de Kneser-Rado-Choquet

La teoría de las funciones armónicas, garantiza la existencia un homomeorfismo de una curva cerrada y simple en $[0; 1]^2$

Mapeos biyectivos

Que x^{-1} sea armónico \Rightarrow que x sea conforme

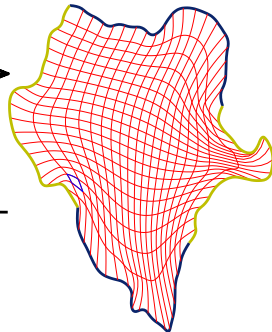
Malla de Nodos y parche de parámetros



$X(\xi, \eta)$

conforme

Malla B-Spline y Parche B-Spline



$X^{-1}(\xi, \eta)$

Armónica

Mapeo Conforme

El inverso del mapeo armónico

$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{bmatrix}$ es **conforme** si $\lambda_1 = \lambda_2$ son los valores propios de:

$$J_{\mathbf{x}}^t J_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 & x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} & x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \end{pmatrix}$$

Si definimos $W = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \Rightarrow \min W$ se alcanza si $\lambda_1 = \lambda_2$.

Por otro lado

$$W = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\text{traza}(J_{\mathbf{x}}^t J_{\mathbf{x}})}{\sqrt{\det(J_{\mathbf{x}}^t J_{\mathbf{x}})}} = \frac{x_{\xi}^2 + x_{\eta}^2 + y_{\xi}^2 + y_{\eta}^2}{x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}} = \frac{\|\mathbf{x}_{\xi}\|^2 + \|\mathbf{x}_{\eta}\|^2}{x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}}$$

Funcional de Winslow

$$\mathbf{x}(G_c, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(\eta)$$

donde

$$G_c = \{P_{i,j} \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

$$\begin{aligned} I_W(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \int_0^1 W(G_c, \xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} d\xi d\eta = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{m-2} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} d\xi d\eta \end{aligned}$$

Funcional de Winslow

$$\mathbf{x}(G_c, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(\eta)$$

donde

$$G_c = \{P_{i,j} \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

$$\begin{aligned} I_W(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \int_0^1 W(G_c, \xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} d\xi d\eta = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{m-2} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \frac{\|\mathbf{x}_\xi\|^2 + \|\mathbf{x}_\eta\|^2}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} d\xi d\eta \end{aligned}$$

Objetivo : $\min_{G_c} I_W(\mathbf{x})$

Funcional Discreto de Winslow

Regla del trapecio

$$I_W(\mathbf{x}) \approx \tilde{I}_W(G_C) = \frac{1}{4(n-2)(m-2)} \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{m-2} \sum_{i=r}^{r+1} \sum_{j=s}^{s+1} W_{i,j}(G_C)$$

donde

- $W_{i,j}(G_C) := W(G_C, \xi_i, \eta_j) = \frac{\rho \|a_{i,j}\|_2^2 + \rho^{-1} \|b_{i,j}\|_2^2}{a_{i,j}^t J_2 b_{i,j}}$
 - $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\rho = \frac{n-2}{m-2}$
 - $a_{i,j}$ y $b_{i,j}$ dependen de $\{P_{i,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}\}$

Funcional Discreto de Winslow

Regla del trapecio

$$I_W(\mathbf{x}) \approx \tilde{I}_W(G_C) = \frac{1}{4(n-2)(m-2)} \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{m-2} \sum_{i=r}^{r+1} \sum_{j=s}^{s+1} W_{i,j}(G_C)$$

donde

- $W_{i,j}(G_C) := W(G_C, \xi_i, \eta_j) = \frac{\rho \|a_{i,j}\|_2^2 + \rho^{-1} \|b_{i,j}\|_2^2}{a_{i,j}^t J_2 b_{i,j}}$
 - $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $\rho = \frac{n-2}{m-2}$
 - $a_{i,j}$ y $b_{i,j}$ dependen de $\{P_{i,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}\}$

Cada $W_{i,j}(G_C)$ involucra solo 4 puntos de control

Caracterización del proceso de optimización

Objetivo:

$$\min_{G_c} \tilde{I}_W(G_c) = \min_{G_c} \left\{ \frac{1}{4(n-2)(m-2)} \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{m-2} \sum_{i=r}^{r+1} \sum_{j=s}^{s+1} W_{i,j}(G_c) \right\}$$

- Es un problema de optimización en gran escala
- La estructura de la función objetivo se puede aprovechar
- Cada sumando involucrado solo depende de 4 puntos de control: $\{P_{i,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}\}$
- Se puede calcular y evaluar el gradiente con comodidad.
- Se incorpora un proceso de regularización para garantizar que el denominador sea suficientemente positivo.
- Se utiliza una subrutina de optimización que implementa el método de Newton Truncado

Outline

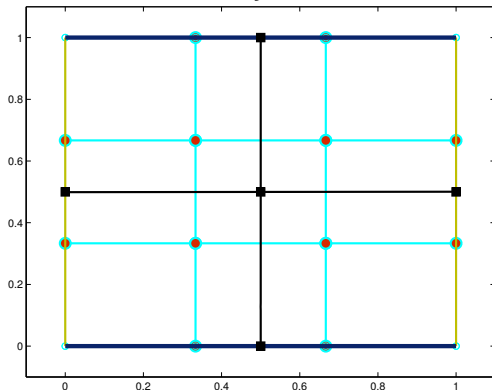
- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - Regiones de prueba irregulares
 - Ejemplos sobre regiones reales

Conexión entre las mallas

Relación entre los puntos del control y los puntos de la malla bicuadrática

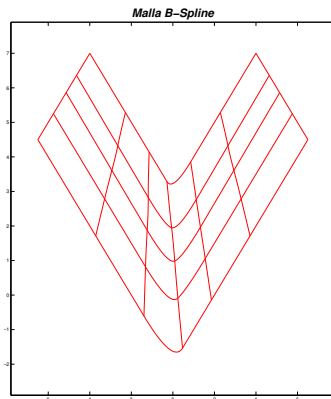
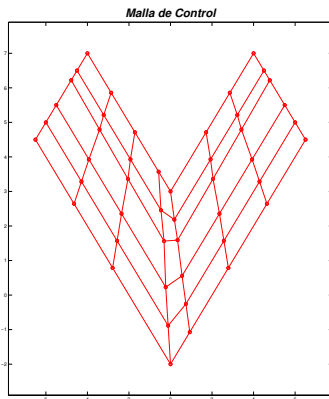
Los puntos de la malla bicuadrática son promedios de los puntos de control

Malla de Control y malla cuadrática



Suavisamiento

Suavisamiento de la poligonal de control externa y homogenización de la malla bicuadrática

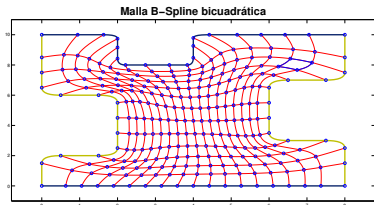
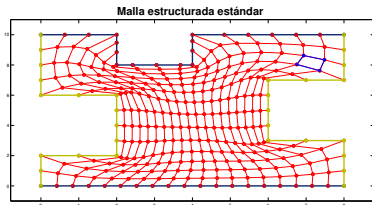


Outline

- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - **Regiones de prueba irregulares**
 - Ejemplos sobre regiones reales

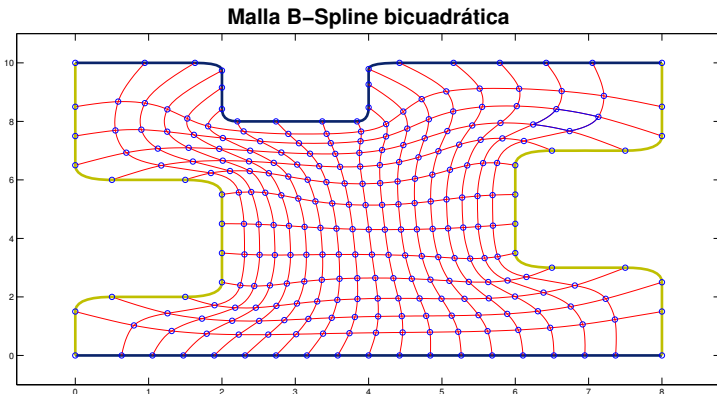
Ejemplo sobre región de prueba M19

Malla de Control y Malla bicuadrática



Ejemplo sobre región de prueba M19

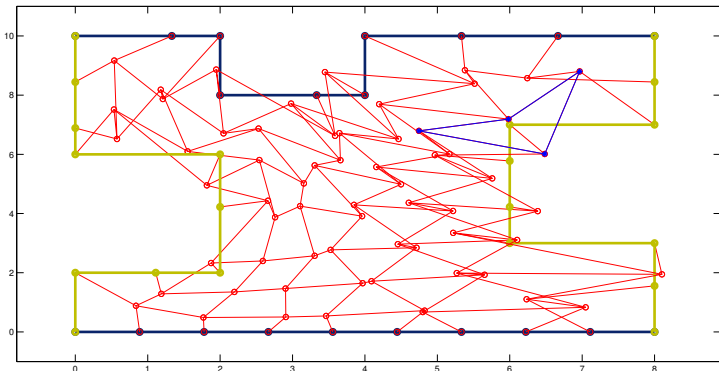
Malla bicuadrática



Robusticidad del mapeo. Ejemplo en M19

Malla de control no convexa

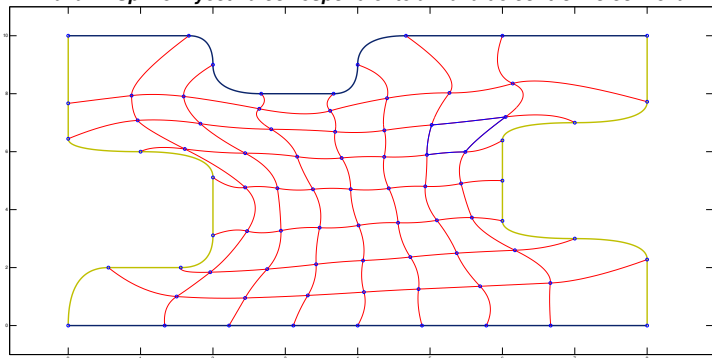
Malla de Control no convexa



Robusticidad del mapeo. Ejemplo en M19

Malla bicuadrática inyectiva

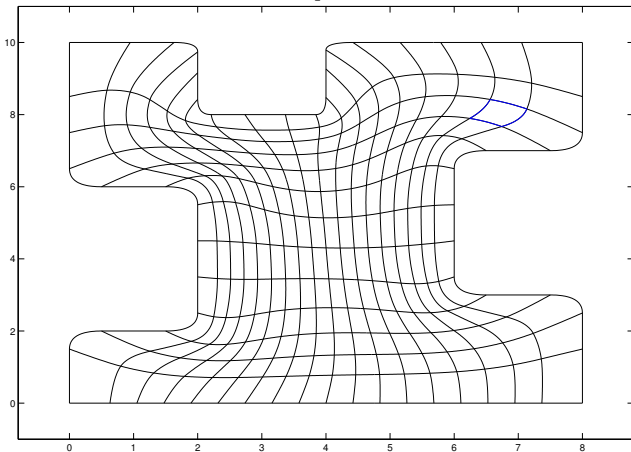
Malla B-Spline inyectiva correspondiente a malla de control no convexa



Refinamiento de la malla

Mapeo Inyectivo de 15 x 20 puntos de control obtenido por optimización

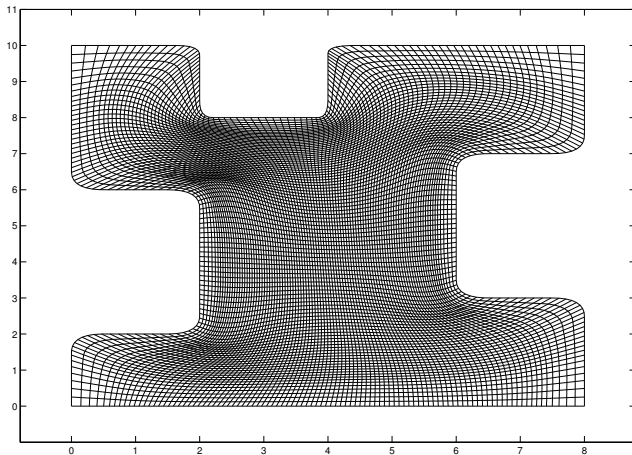
Malla B-Spline 15x20



Refinamiento de la malla

Malla por evaluación 100x100

Evaluación 100x100



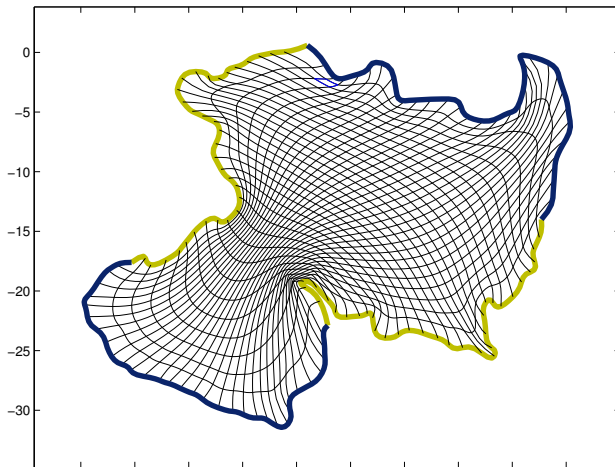
Outline

- 1 Mapeos B-Spline Bicuadráticos Armónicos
 - Motivación
 - Mapeo B-Spline Bicuadrático
 - Mapeos Armónicos y funcional de Winslow
- 2 Experimentos numéricos
 - Características básicas de las mallas bicuadráticas
 - Regiones de prueba irregulares
 - Ejemplos sobre regiones reales

Estado de Michoacán

Mapeo bicuatráctico inyectivo

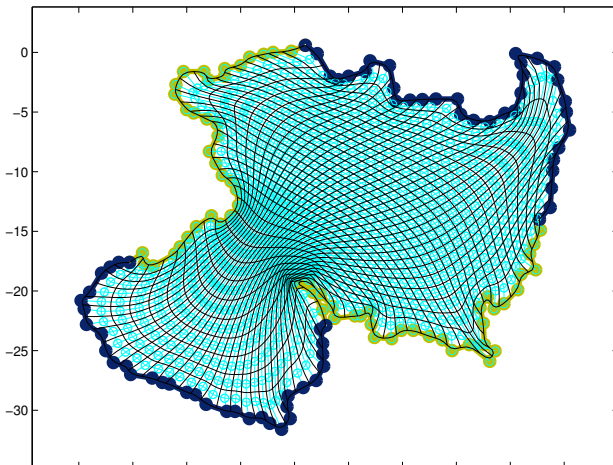
Michoacán: Malla B-Spline bicuatráctica



Estado de Michoacán

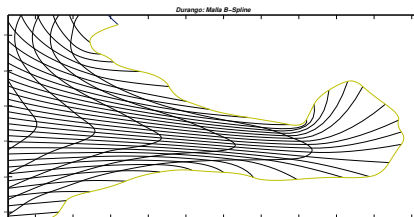
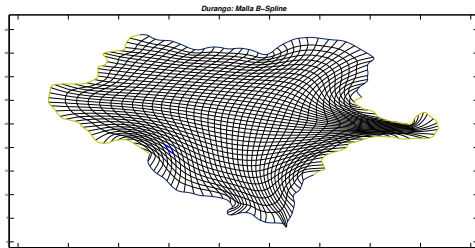
Malla de control y malla bicuadrática

Michoacán: Malla de Control y malla bicuadrática



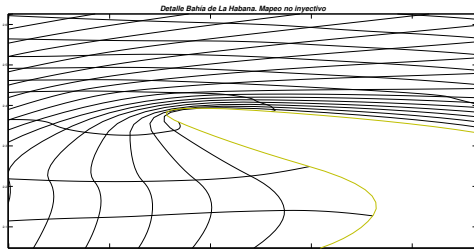
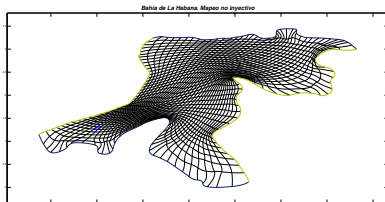
Estado de Durango

Mapeo bicuadrático inyectivo con detalle

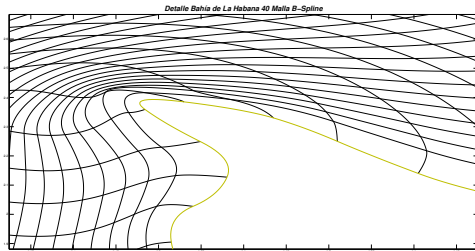
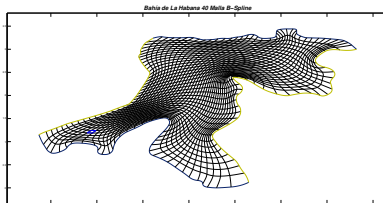


Bahía de La Habana: Mapeo NO inyectivo

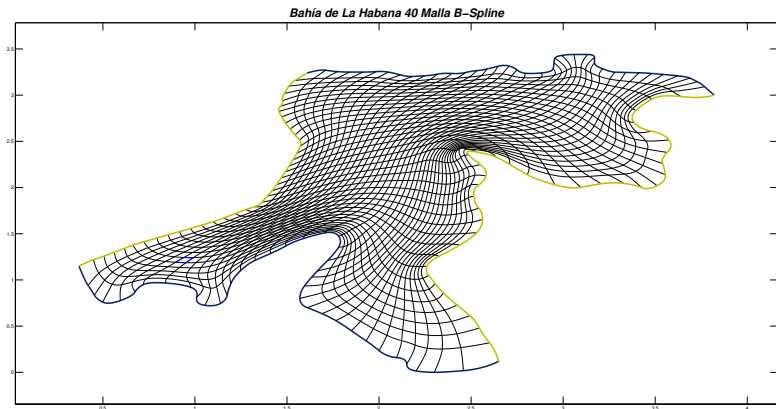
Antes de optimizar



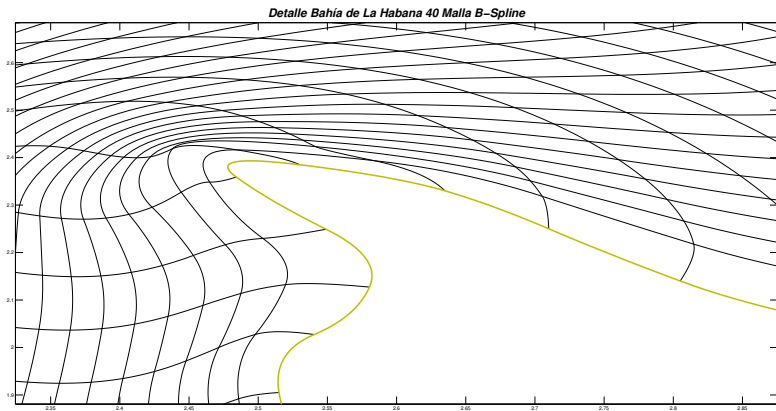
Bahía de La Habana: Mapeo Inyectivo Optimizado



Bahía de La Habana: Mapeo Inyectivo Optimizado






Bahía de La Habana: Mapeo Inyectivo. Detalle Optimizado



Conclusiones

- Se pueden construir mapeos B-spline bicuadráticos sobre regiones irregulares a partir de mallas de control
- Estos mapeos son bastante robustos a pesar que la calidad de la malla de control no sea la mejor
- Minimizar un funcional de Winslow es una manera de obtener un mapeo armónico y por lo tanto un homeomorfismo

Bibliografía

-  *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: 8th International Conference, MMCS 2012, Oslo, Norway, 2012*
Revised Selected Papers. Springer
-  **Gang Xu; B. Mourrain; R Duvigneau; A. Galligo**
Parameterization of computational domain in isogeometric analysis: Methods and comparison. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 01/2011;
200(23):2021-2031
-  **Sistema UNAMalla**
http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/home_e.html