IV Encuentro Cuba–México de Métodos Numéricos y Optimización

# Construcción de mallas estructuradas cuasi-armónicas con control de *aspect ratio*

**Pablo Barrera Sánchez, Guilmer González**

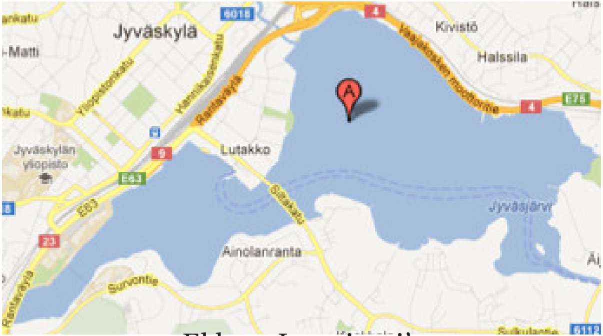
Laboratorio de Cómputo Científico
Facultad de Ciencias, UNAM

La Habana, Cuba, 19 de enero de 2015

# Outline

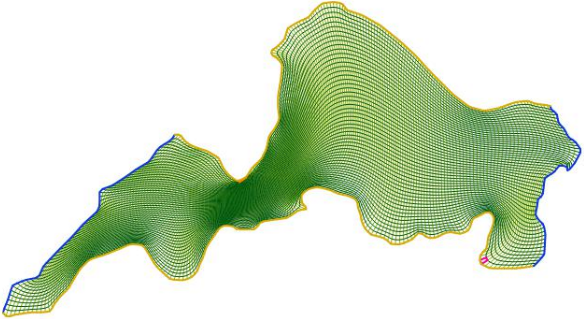
## Table of Contents

Dado una región, simplemente conexa $\Omega$, por ejemplo




El lago Jyvasjarvi's

Estamos interesados en construir una malla estructrada sobre este tipo de regiones



Una malla sobre el lago Jyvasjarvi's

### Definition

Una malla discreta $G$ de dimensión $m \times n$ sobre $\Omega$ es un mapeo entre la rejilla de $B$

$$G : U(m,n) \mapsto \mathbf{R}^2$$

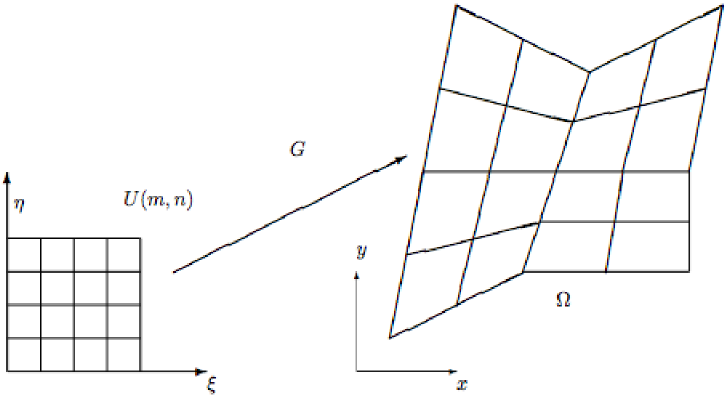
de tal manera

$$G(\partial U) \subset \partial\Omega$$

y

$$\partial G = G(\partial U) = \Gamma_{mn} \subset \partial\Omega$$

## A discrete mesh




La malla discreta es un mapeo de una rejilla simple hacia la región de interés.

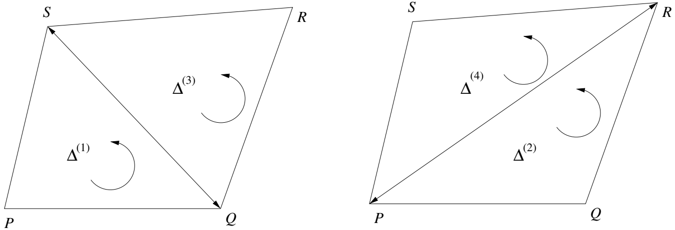
Tenemos varias cuestiones que resolver

1. Cómo garantizar que las celdas sean convexas.
2. Desamos que la malla obtenida cuente con propiedades geométricas adicionales: suavidad, ortogonalidad, control del tamaño.
3. Calidad de las celdas, control sobre la forma de la celda.
4. Mallas adaptivas discretas.

Construir mallas sobre regiones planas es un problema que ha sido abordado desde hace tiempo de diferentes formas. La forma discreta es la que a nosotros nos interesa abordar. Algunos autores que han propuesto ideas al respecto son

1. Philippa, 1977.
2. Diaz, *et al*, 1983.
3. Kenon y Dulikravich, 1985.
4. Castillo *et al*., 1987.
5. Ivanenko y Charakhch'yan, 1988.
6. Barrera *et al*. 1992
7. Ivanenko, 1995-1999.
8. Barrera y Tinoco, 1997.
9. Garanzha, 2001.
10. Barrera, Domínguez y González 2003
11. Zhang, Jia y Wang, 2006
12. Azarenok, 2008
13. Barrera, Domínguez y González, 2007, 2010, 2013.

Si la frontera $\partial\Omega$ tiene orientación positiva, esta induce una orientación sobre las celdas $c_{ij} = G(B_{ij})$ y sobre los triángulos




Nuestro interés es garantizar que las celdas sean convexas y cuenten con alguna propiedad como suavidad o cuasi ortogonalidad.

La idea es minimizar una función adecuada de la forma

$$F(G) = \sum_{q=1}^{N} f(\triangle_q), \tag{1}$$

donde $f(\triangle_q)$ depende solamente de los vértices del triángulo $\triangle_q$ y $N$ es el número total de triángulos de la malla.

**Problema** Ahora el problema se centra en optimizar funcionales

$$G^* = \arg \min_{G \in M(\Omega)} \sum_{q=1}^{N} f(\triangle_q)$$

sobre el conjunto $M(\Omega)$ de mallas admisibles para $\Omega$ y nuestro principal interés es: **cómo garantizar que en el óptimo se obtenga un malla convexa?**.

## Table of Contents

Teniendo los vértices del triángulo orientado $A, B, C \in \mathbf{R}^2$ podemos definir

- una medida de longitud (o suavidad)

$$\lambda(\triangle(A,B,C)) = \|A-B\|^2 + \|C-B\|^2$$

- una medida del área

$$\alpha(\triangle(A,B,C)) = (B-A)^t J_2 (B-C) = 2\text{área}(\triangle(A,B,C))$$

donde

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- y de la ortogonalidad

$$o(\triangle(A,B,C)) = (B-A)^t(B-C)$$

## Funcionales geométricos clásicos

- funcional de área

$$F_A(G) = \sum_{q=1}^{N} \alpha(\triangle_q)^2$$

- funcional de longitud o de suavidad

$$F_L(G) = \sum_{q=1}^{N} \lambda(\triangle_q)^2$$

- funcional de ortogonalidad

$$F_O(G) = \sum_{q=1}^{N} o(\triangle_q)^2$$

## Combinaciones usuales

- funcional de área–orthogonalidad

$$F_{AO}(G) = \sum_{q=1}^{N} \frac{\alpha(\triangle_q)^2}{2} + \frac{o(\triangle_q)^2}{2}$$

- funcional de área–longitud

$$F_{AL}(G) = \sum_{q=1}^{N} \sigma\alpha(\triangle_q)^2 + (1-\sigma)\lambda(\triangle_q)^2$$

## Funcional de Winslow o de suavidad

$$I_s = \int\int_B \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{J(\xi,\eta)} \, d\xi \, d\eta$$

el mapeo inverso es armónico.

**Barrera *et. al*, 1994**

Armónico discretizado

$$F_H(G) = \sum_{q=1}^{N} \frac{\lambda(\triangle_q)}{\alpha(\triangle_q)}$$

**Barrera–Tinoco, 1997**

funcional cuasi-armónico discreto

$$F_{H\omega}(G) = \sum_{q=1}^{N} \frac{\lambda(\triangle_q) - 2\alpha(\triangle_q)}{\omega + \alpha(\triangle_q)}$$

donde $\omega$ es un valor adecuado. La idea del funcional anterior es encontrar una región $D$ donde exista una malla convexa mediante una propiedad de obstáculo.

Supongamos que sobre $\Omega$ podemos construir una malla convexa de $m \times n$.

Cómo deben ser los funcionales de la forma

$$F(G) = \sum_{q=1}^{N} f(\triangle_q), \tag{2}$$

en cuyo óptimo se obtenga una malla convexa?

Sea

$$D(\Omega,\Gamma_{m,n}) = \left\{G \mid m\times n \text{ una malla de } \Omega,\, \partial\Omega = \Gamma_{m,n}\right\}$$

y

$$\alpha_-(G) = \min \alpha(\Delta_q); \qquad \alpha_+(G) = \max \alpha(\Delta_q)$$

$$\overline{\alpha}(G) = \frac{1}{N}\sum_{q=1}^{N} \alpha(\Delta_q), \qquad \alpha(\Delta) = 2\text{área}(\Delta)$$

Uno de los reultados de 1994 señala que:

$$\overline{\alpha}(G) = \frac{\text{área}(\Omega)}{(m-1)(n-1)}$$

is independentiente de $G$.

Se observa que la construcción de la malla es fuertemente dependiente de la distribución de los nodos de la frontera y se plantean varios problemas adicionales como:

**Problema** Encontrar $G \in M(\Omega, \Gamma_{m,n})$ convexa

Qué tan difícil es este problema?

## Barrera, Mota 2002

Una solución eficiente fue propuesta por Barrera y Domínguez-Mota,

**Teorema**

Si $f$ es una función convexa $C^2$ estrictamente decreciente y acotada por abajo de manera que $f(\alpha) \to 0$ cuando $\alpha \to \infty$, entonces

$$S_{\omega,\epsilon}(G) = \sum_{q=1}^{N} f(\omega \cdot \alpha(\triangle_q)) \tag{3}$$

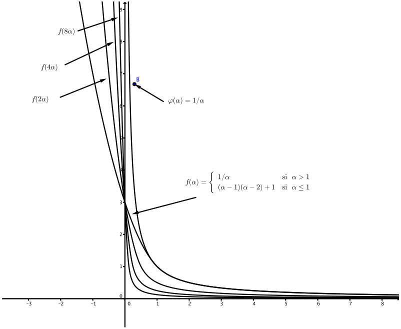
para un valor $\omega$ suficientemente grande, su óptimo es una malla convexa.

Una función $f$ propuesta es

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha \geq 1 \\ (\alpha - 1)(\alpha - 2) + 1, & \alpha < 1 \end{cases} \tag{4}$$

con la cual hemos obtenido muy buenos resultados.

## La forma de la función




Es un obstáculo “suave” en el sentido de que para $\omega$ suficientemente grande esta función nos “empuja” a encontrar una malla convexa.

Usando los funcionales convexos de área, se observó que para muchas regiones irregulares y para un valor de $\omega$ grande, al proceso de optimización le costaba converger, ya algunas celdas oscilaban y era numéricamente sencible para identificar si la celda era o no convexa.

**Definition**

Sea $\epsilon > 0$, diremos que una malla $G$ es $\epsilon$-convexa si y solo sí

$$\alpha_{-}(G) > \epsilon \cdot \overline{\alpha}(\Omega)$$

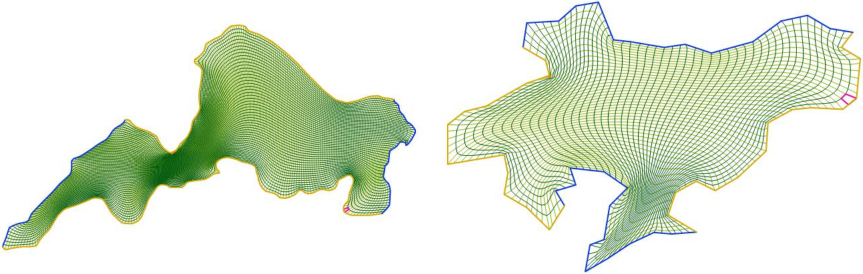
En la práctica se ha encontrado que en la mayoría de las regiones irregulares de prueba empleadas para un $\epsilon = 10^{-5}$ se obtienen $\epsilon$-convexas.

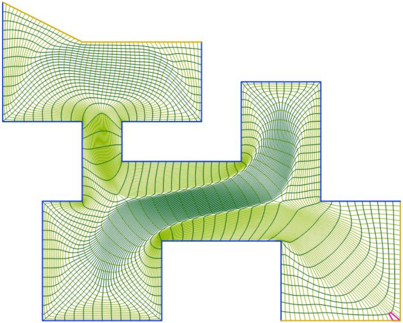
## Combinación con funcionales clásicos

Combinando este funcional con el de ortogonalidad

$$F(G)) = \sigma S_{\omega,\epsilon}(G) + (1-\sigma)F_o(G)$$

se pudieron construir mallas casi-ortogonales y $\epsilon$-convexas (Domínguez, 2005).





*Observación: el éxito de esto es combinar un funcional convexo de área que garantizan y preservan la convexidad de las celdas con funcionales geométricos.*

## Table of Contents

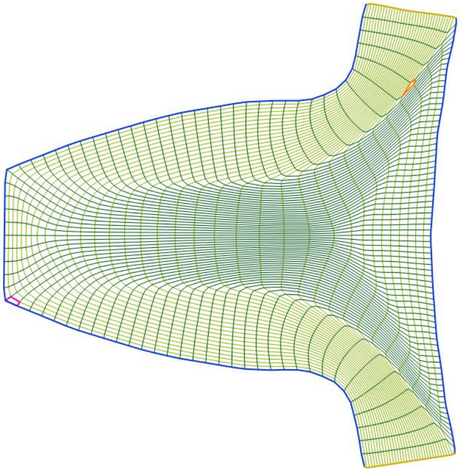
### Problemas pendientes

En algunos problemas es importante contar con malla de calidad para obtener buenos resultados

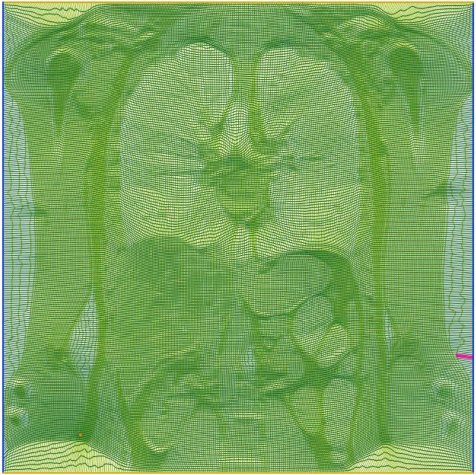
1. Calidad de las celda (controlar la distribución del área el de las celdas).
2. Construir Mallas adaptivas geométricas.
3. Controlar la forma de las celdas

## Table of Contents

En los últimos años hemos podido garantizar que las mallas estructuradas construidas por los funcionales convexos de área son $\epsilon-$convexas



y usando estos resultado nos hemos abocado a atacar el problema de la adaptividad geométrica.



Una malla adaptiva sobre una MRI de un torso humano.

Sin embargo, se pueden obtener celdas con elementos distorsionados, por ejemplo alargados.

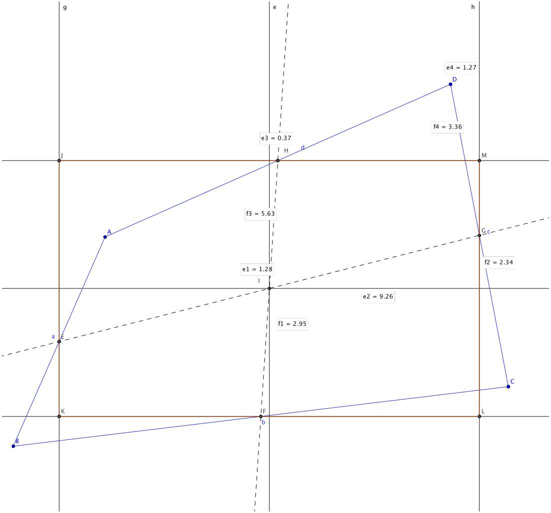
Se sabe que cuando se presentan variaciones considerable de la distorsión de los elementos de la malla se pueden obtener resultados numéricos no adecuados e inestables en algunos métodos FEM y de diferencias finitas.
En la práctica

1. o construimos métodos FEM o de DF que sean poco sencibles a la distorsión de las celdas.
2. o nos abocamos a controlar la distorsión de las celdas.

Para mitigar este problema es usual darle un post-procesamiento a la malla inicial para mejorar o suavizar las celdas con el fin de minimizar las distorsiones geométricas.

**Problem**

*Cómo controlar la calidad de las celdas? En particular su forma.*




*Interés: queremos controlar el* aspect ratio *de las celdas.*

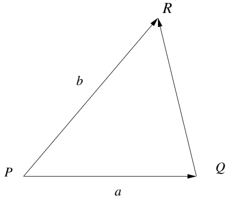
*Idea: lograr que las celdas sean lo más cercano a un rectángulo.*

Recuperemos el funcional de Winslow

$$I_s = \int\int_B \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{J(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta$$

el mapeo inverso es armónico.

Si sobre un triángulo observamos dos de sus lados




la discretización del armónico sobre el triángulo se escribe

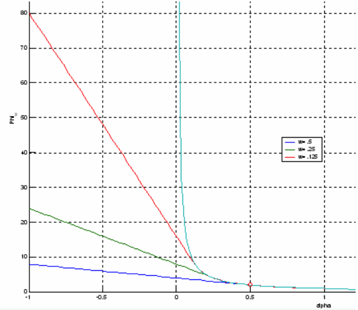
$$\tilde{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{l}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2}{\mathbf{a}^t \mathbf{J}_2 \mathbf{b}}$$

el cual tiene su óptimo cuando

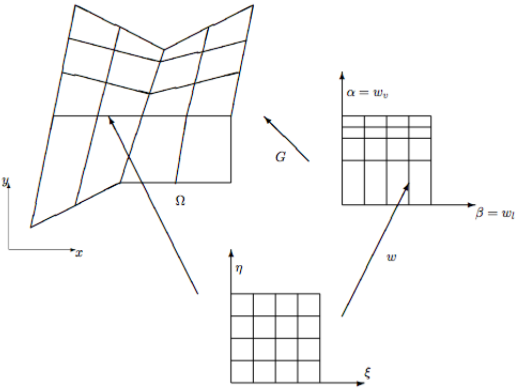
$$\mathbf{a}^t\mathbf{b} = 0, \quad \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$$

esto es, sobre los triángulos rectángulos isósceles.

Este funcional tiene la propiedad de obstáculo que garantiza la existencia de una malla convexa.
Para su implementación computacional empleamos una regularización lineal de la forma



Si la malla lógica es reparametrizada y sobre de esta discretizamos el funcional armónico




obtendremos una funcional ponderado.

El cual tiene la forma

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\alpha_k^2\|\mathbf{a}\|^2 + \beta_k^2\|\mathbf{b}\|^2}{\alpha_k\beta_k\mathbf{a}^t J_2\mathbf{b}}$$

haciendo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a},\mathbf{b}) - 2 &= \frac{\alpha_k^2\|\mathbf{a}\|^2 + \beta_k^2\|\mathbf{b}\|^2 - 2\alpha_k\beta_k\mathbf{a}^t J_2\mathbf{b}}{\alpha_k\beta_k\mathbf{a}^t J_2\mathbf{b}} \\ &= \frac{\|\alpha_k\mathbf{a} - \beta_k J_2\mathbf{b}\|^2}{\alpha_k\beta_k\mathbf{a}^t J_2\mathbf{b}} \end{aligned}$$

en el óptimo ocurre que

$$\alpha_k \mathbf{a} - \beta_k J_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

esto es

$$\|\mathbf{a}\| = \frac{\beta_k}{\alpha_k} \|\mathbf{b}\|$$

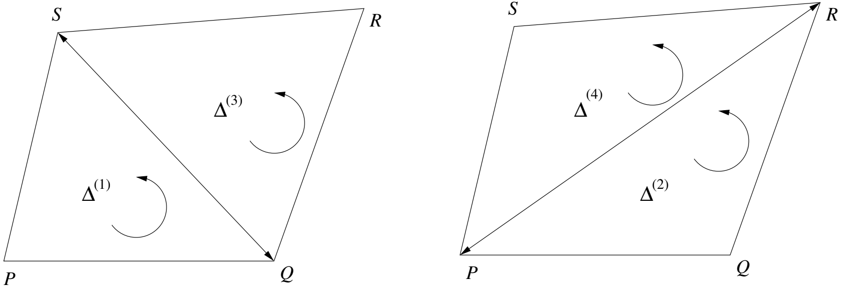
Con todo esto el funcional cuasi-armónico puede ser reescrito como

$$f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\rho\|a\|^2 + 1/\rho\|b\|^2}{\mathbf{a}^t J_2 \mathbf{b}}$$

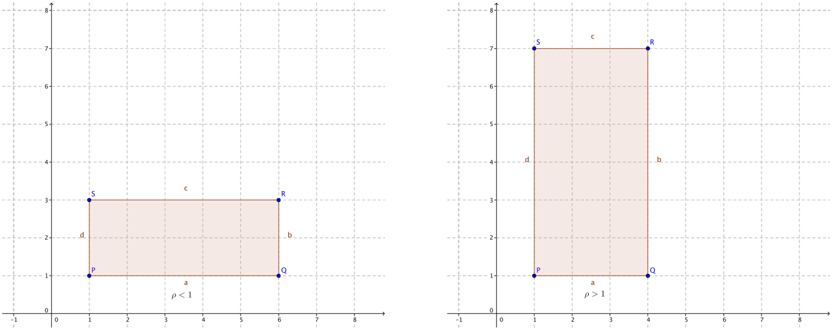
donde $\rho = \alpha_k/\beta_k$ está asociado con el tamaño de las celdas en el espacio de referencia.

La idea es usar estos parámetros $\alpha, \beta$ para controlar el tamaño de los lados y siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ ortogonales en el óptimo podemos construir mallas suaves y convexas con las propiedades cercanas al óptimo del funcional armónico: los triángulos son cercanos a ser triángulos rectángulos.

Como los triángulos los hemos orientado



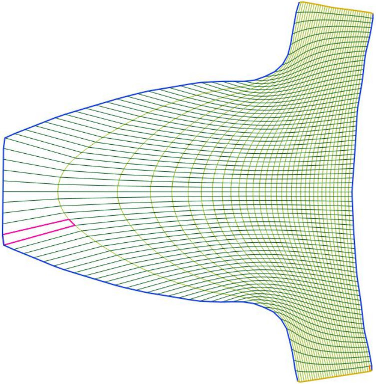

la razón $\rho$ es una razón con dirección: la razón de segmento horizontales entre segmentos verticales de cada celda.



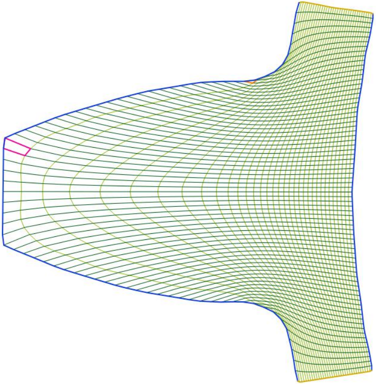

Efecto del parámetro $\rho$

## Table of Contents

## Efecto del parámetro $\rho$

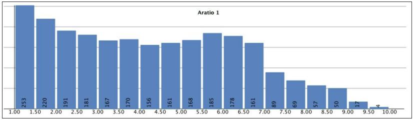


$\rho = 1$

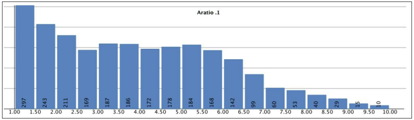


$\rho = .1$

## Efecto del parámetro $\rho$

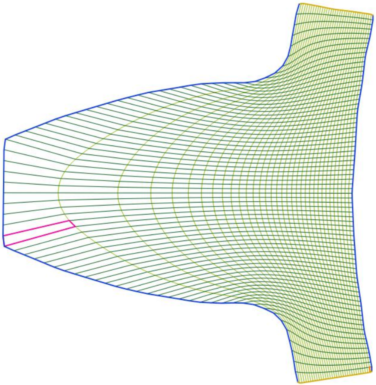



$\rho = 1$

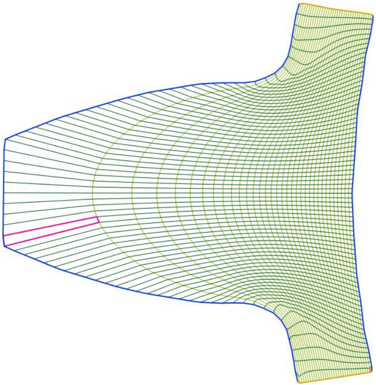



$\rho = .1$

## Efecto del parámetro $\rho$

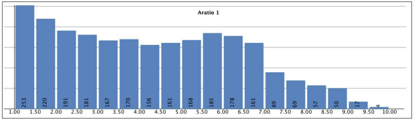


$\rho = 1$

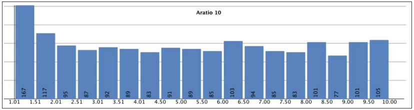


$\rho = 10$

## Efecto del parámetro $\rho$

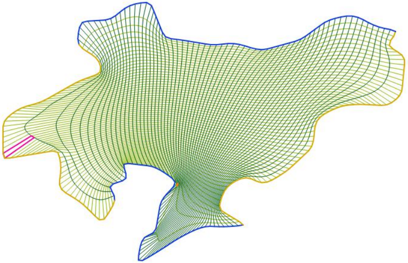



$\rho = 1$

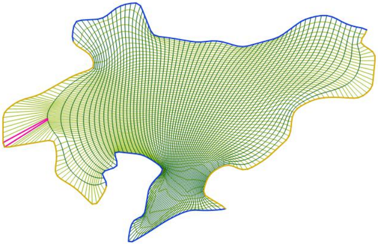



$\rho = 10$

## Efecto del parámetro $\rho$

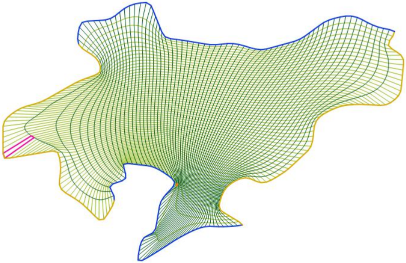


$\rho = 1$

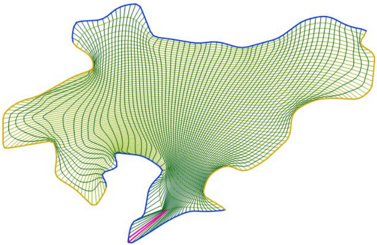


$\rho = .05$

## Efecto del parámetro $\rho$

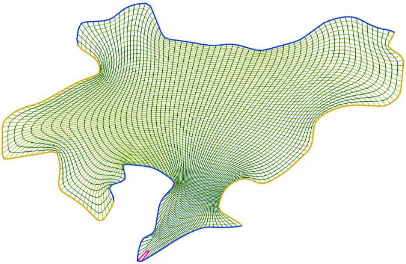


$\rho = 1$

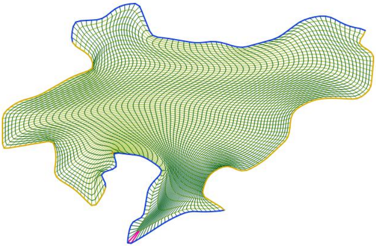


$\rho = 15$

## Efecto del parámetro $\rho$

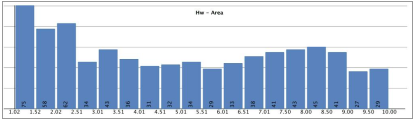


$H_\omega - \text{area}$

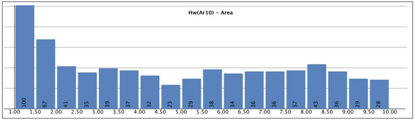


$\rho = 15$

## Efecto del parámetro $\rho$




$H_\omega - \text{area}$



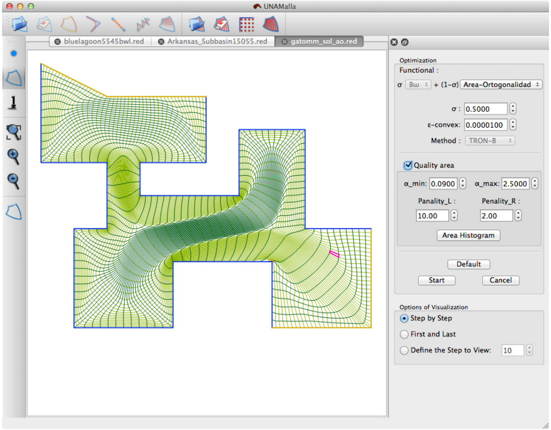

$\rho = 15$

## Table of Contents

## Conclusiones

1. Hemos propuesto recuperar el funcional cuasi-armónico para controlar la forma de las celdas.
2. Controlamos en forma unidireccional el *aspect ratio* de las celdas.

software: www.matematicas.unam.mx/unamalla
es gratuito y fácil de usar!



# Muchas gracias