Descubriendo la relación entre dos paradigmas: Filtrado por difusión no lineal y por reducción wavelet.

Ángela Mireya León Mecías

Universidad de La Habana

IV Enuentro Cuba-México, 19 de Enero 2015

Introducción

Dos métodos frecuentemente usados para el filtrado en imágenes

- Filtrado por difusión no lineal (anisotrópica)
- Reducción wavelet (Wavelet Shrinkage)

Mrázek P., Weickert J., Steidl G. Correspondes between Wavelet Shrinkage and Nonlinear Diffusion. L. D. Griffin and M. LillHolm (Eds):Scale-Space 2003, LNCS 2695, pp. 101-116, 2003.

Introducción

Filtrado

Eliminación de ruido

Ruido

Interferencia o distorsión que afecte la precisión en los datos

- 1-D calidad en la señal $I = f(x)$
- 2-D calidad en la imagen $I = f(x, y)$
- 3-D calidad en una secuencia de video $I = f(x, y, t)$

Introducción

Filtrado

Eliminación de ruido

Ruido

Interferencia o distorsión que afecte la precisión en los datos

- 1-D calidad en la señal $I = f(x)$
- 2-D calidad en la imagen $I = f(x, y)$
- 3-D calidad en una secuencia de video $I = f(x, y, t)$

Filtrado: Problema clásico

lo más común

Modelo aditivo: $y(t_i) = f(t_i) + r(t_i), i = 1, ..N$

- $r(t_i)$ ruido

Objetivo

Filtrar (eliminar, limpiar) el ruido $r(t_i) \Rightarrow$ *recuperar* f(t_i) con la mejor calidad posible

Filtrado: Problema clásico

lo más común

Modelo aditivo: $y(t_i) = f(t_i) + r(t_i), i = 1, ..N$

- $r(t_i)$ ruido

Objetivo

Filtrar (eliminar, limpiar) el ruido $r(t_i) \Rightarrow$ *recuperar* f(t_i) con la mejor calidad posible

Filtrado: Problema clásico

Interés particular: eliminar ruido de imágenes digitales $I_i = f(x_i, y_j)$

- (x_i, y_j): posición de los píxeles en una imagen
- I_i valor de la intensidad en escala de grises

Filtrado: Problema clásico

Salt and Pepper noise 5%

Median Filter mask 3x3

Imagen digital

Muestreo

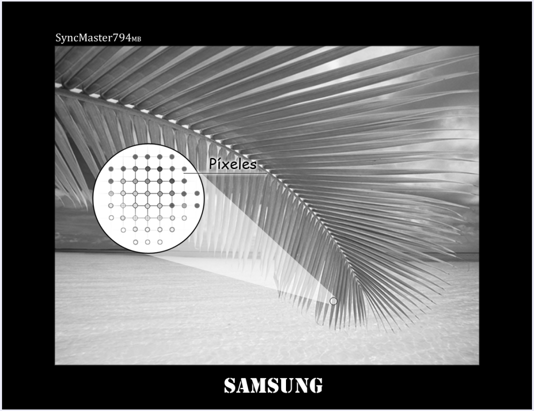
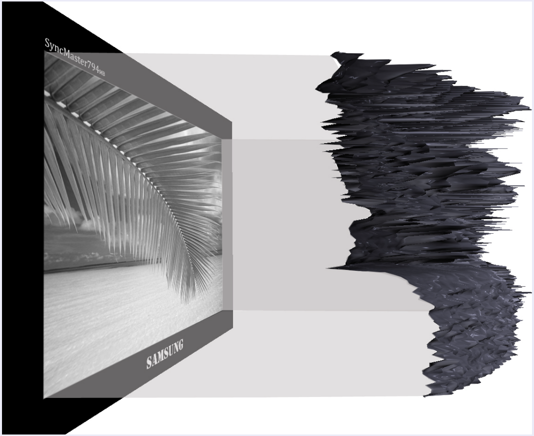


Imagen digital

Cuantificación



La imagen:medio de comunicación poderoso

Métodos de filtrado en imágenes

En la Literatura: Image Denoising, Image Enhacement

Filtros lineales

- $g(i,j) = \sum_{k,l} f(i+k, j+l)h(k,l)$
- difusión lineal (filtro Gaussiano)

Desventaja

tienden a emborronar la imagen, con la pérdida de estructuras importantes

Métodos de filtrado en imágenes

En la Literatura: Image Denoising, Image Enhacement

Filtros lineales

- $g(i,j) = \sum_{k,l} f(i+k, j+l)h(k,l)$
- difusión lineal (filtro Gaussiano)

Desventaja

tienden a emborronar la imagen, con la pérdida de estructuras importantes

Métodos de filtrado en imágenes

En la Literatura: Image Denoising, Image Enhacement

Filtros no lineales

- métodos estocásticos
- morfología matemática
- suavizado adaptativo
- ecuaciones diferenciales parciales
- técnicas wavelet
- métodos variacionales

Eliminan el ruido preservando ciertas estructuras como los bordes

Contenido

- Difusión
  - lineal (isotrópica)
  - no lineal (anisotrópica)
  - Coeficiente de difusión
- Reducción wavelet (Wavelet Shrinkage)
  - Transformada wavelet discreta
  - Algoritmo de reducción wavelet
  - Función de reducción
- Relación entre ambos paradigmas
  - Equivalencia entre difusión no lineal discreta y reducción wavelet
  - Relación entre coeficiente de difusión y función de reducción

Modelos de difusión

Difusión

- proceso que equilibra diferencias de concentración sin crear o destruir masa
- identificar la concentración u con el nivel de gris
- ley de Fick $j = -D.\nabla u$, D representa el tensor de difusión que es una matriz simétrica y definida positiva.
- ecuación de continuidad (la difusión sólo transporta la masa sin destruirla o crearla)

$$\partial_t u = -\nabla \bullet (j)$$

- ecuación de difusión

$$\partial_t u = -\nabla \bullet (D.\nabla u)$$

Modelos de difusión

Difusión aplicada a imágenes

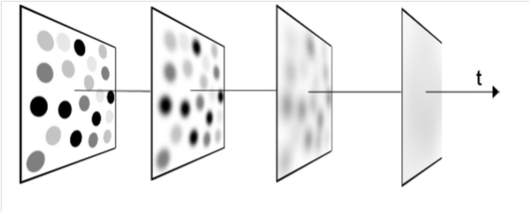
Genera una familia de imágenes $I(x_i, y_j, t_k)$, $k = 1, ..T$ $i = 1, ..M$ $j = 1, ..N$ recuperadas a partir de una imagen inicial$I(x_i, y_j, t_0)$ y según un modelo dado por ecuaciones diferenciales parciales. Dicho proceso es controlado por el llamado coeficiente de difusión D

Difusión lineal: D =constante

- $$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$
  $$u(x,0) = u_0(x)$$

  $u_0 \in C(\Re^2)$ acotada
- $$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x),\ x = 0 \\ (K_{\sqrt{2t}} * u_0)(x),\ t > 0 \end{cases}$$
- $$K_\sigma(x) := \frac{1}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2})$$
- $$(K_\sigma * u_0) := \int_{\Re^2} K_\sigma(x-y) u_0(y) dy, \text{filtro de paso bajo}$$
- t está relacionado con el parámetro $\sigma = \sqrt{2t}$.

Características de la difusión lineal (isotrópica)



- Los bordes no son respetados
- El enlace entre regiones es destruido

Filtros de difusión lineal por primera vez en el procesamiento (T. Iijima, Basic Theory of pattern normalization (in case of typical one-dimensional pattern). Bulletin of the Electrotechnical Laboratory, Vol 26, 368-388, 1962, en japonés)

Difusión no lineal (anisotrópica)

Simplificar notación

Modelos unidimensionales $u(x,t)$, $u = I$, nivel de gris en cada píxel

Difusión no lineal (anisotrópica)

Modelo 1-D

Familia de versiones filtradas $u(x,t)$, de la imagen $f(x)$ como solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial_x \left(g(\partial_x u, t) \partial_x u \right).$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x)$$

Coeficiente de difusión

$g(\partial_x u, t)$ función no negativa que controla la difusión

Difusión no lineal (anisotrópica)

Modelo 1-D

Familia de versiones filtradas $u(x,t)$, de la imagen $f(x)$ como solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial_x \left(g(\partial_x u, t) \partial_x u \right).$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x)$$

Coeficiente de difusión

$g(\partial_x u, t)$ función no negativa que controla la difusión

Difusión no lineal (anisotrópica)

Intuitivamente

$$\begin{array}{ccccc} |\partial_x u| \downarrow & \Rightarrow & x \text{ no borde} & \Rightarrow & g(x,t) \to 1 \\ |\partial_x u| \uparrow & \Rightarrow & x \text{ de borde} & \Rightarrow & g(x,t) \to 0 \end{array}$$

Se asegura que los bordes sean menos difuminado que el ruido

Por primera vez en el procesamiento de imágenes

P. Perona and J. Malik. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-12:629–639, 1990.

$$g(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\left[\frac{|\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right]^2\right\} \quad \text{y} \quad g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{1+\left(\frac{|\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right)^2}$$

Difusión no lineal (anisotrópica)

Intuitivamente

$$\begin{array}{ccccc} |\partial_x u| \downarrow & \Rightarrow & x \text{ no borde} & \Rightarrow & g(x,t) \to 1 \\ |\partial_x u| \uparrow & \Rightarrow & x \text{ de borde} & \Rightarrow & g(x,t) \to 0 \end{array}$$

Se asegura que los bordes sean menos difuminado que el ruido

Por primera vez en el procesamiento de imágenes

P. Perona and J. Malik. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-12:629–639, 1990.

$$g(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\left[\frac{|\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right]^2\right\} \quad \text{y} \quad g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{1+\left(\frac{|\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{y})|}{k}\right)^2}$$

Difusión no lineal (anisotrópica)

Expresiones más usadas para el coeficiente de difusión	
$g(\|x\|) = 1$	Difusión lineal
$g(\|x\|) = \frac{1}{1+\frac{\|x\|^2}{k^2}}$	Perona-Malik 1990
$g(\|x\|) = exp(\frac{-\|x\|^2}{2k^2})$	Perona-Malik 1990
$g(\|x\|) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - \frac{\|x\|^2}{2k^2}]^2, \|x\| \leq \sqrt{2}k \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$	Tukey's biweight 1998,
$g(\|x\|) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\|x\|^2}{k^2}}}$	Charbonnier 1997
$g(\|x\|) = \begin{cases} 1, \|x\| \leq 0 \\ 1 - exp\left(\frac{-C_m}{(\|x\|/k)^m}\right), s > 0 \end{cases}$ m = 2 Cm = 2.33666	Weickert 1998
$g(\|x\|) = \frac{1}{\|x\|}$	Variación Total

Difusión no lineal (anisotrópica)

No todas funcionan igual

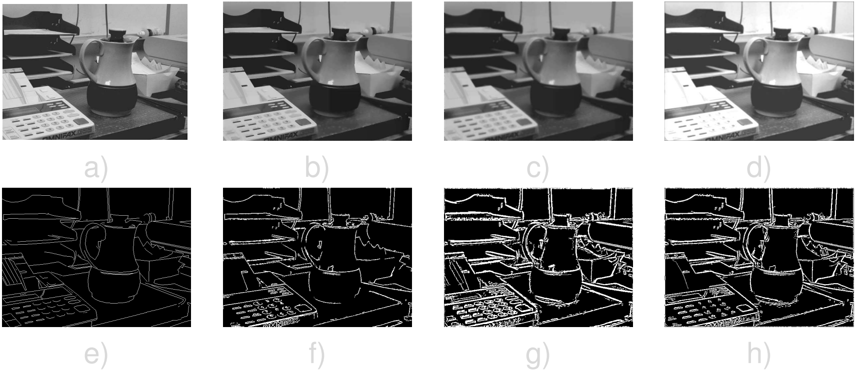


Figura: a) Imagen original. b) Suavizada por DA con KMLS. c) Suavizada por DA con p-norm. d) Suavizado Gaussiano. e) Ground truth imagen de borde f), g) and h) imágenes de borde respectivas.

Difusión no lineal (anisotrópica)

No todas funcionan igual

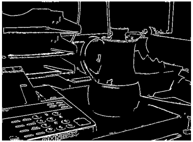

a)


b)


c)


d)


e)


f)


g)


h)

Figura: a) Imagen original. b) Suavizada por DA con KMLS. c) Suavizada por DA con p-norm. d) Suavizado Gaussiano. e) Ground truth imagen de borde f), g) and h) imágenes de borde respectivas.

Difusión no lineal

Esquema de discretización explícita

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \tau g(|u_i^k - u_{i+1}^k|)(u_i^k - u_{i+1}^k) + \tau g(|u_{i-1}^k - u_i^k|)(u_{i-1}^k - u_i^k)$$

con condición inicial

$$u_i^0 = f_i, \text{ para toda i}$$

Reducción wavelet

Transformada wavelet discreta 1-D (TWD)

- $J \geq 0$, 2^J datos $f_0, f_1, .., f_{2^J-1}$
- Representación de f en bases wavelet

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2^J-1} c_i^j \varphi_i^J(x) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^j-1} d_i^j \psi_i^j.$$

Bases wavelet ortonormales

- $$\varphi_i^j(x) = \sqrt{2^j}\varphi(2^j x - i)$$
  $$\psi_i^j(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - i)$$
- $d_i^j = \langle f, \psi_i^j \rangle$ coeficientes de detalle
- $c_i^j = \langle f, \varphi_i^J \rangle$ coeficientes de aproximación

Reducción wavelet

Transformada wavelet discreta 1-D (TWD)

- $J \geq 0$, 2^J datos $f_0, f_1, .., f_{2^J-1}$
- Representación de f en bases wavelet

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2^J-1} c_i^j \varphi_i^J(x) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^j-1} d_i^j \psi_i^j.$$

Bases wavelet ortonormales

- $$\varphi_i^j(x) = \sqrt{2^j}\varphi(2^j x - i)$$
  $$\psi_i^j(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - i)$$
- $d_i^j = \langle f, \psi_i^j \rangle$ coeficientes de detalle
- $c_i^j = \langle f, \varphi_i^J \rangle$ coeficientes de aproximación

Reducción wavelet

TWD de Haar

- $c_i^j = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i}^{j-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i+1}^{j-1}$
- $d_i^j = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i}^{j-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i+1}^{j-1}$

Ruido en la TWD

- Si los datos f están afectados de ruido (Gaussiano), $\Rightarrow$ ruido contenido en pequeñas cantidades en todos los coeficientes wavelet d_i^j
- La señal original está determinada por pocos coeficientes wavelet significativos

Reducción wavelet

TWD de Haar

- $c_i^j = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i}^{j-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i+1}^{j-1}$
- $d_i^j = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i}^{j-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{2i+1}^{j-1}$

Ruido en la TWD

- Si los datos f están afectados de ruido (Gaussiano), $\Rightarrow$ ruido contenido en pequeñas cantidades en todos los coeficientes wavelet d_i^j
- La señal original está determinada por pocos coeficientes wavelet significativos

Reducción wavelet

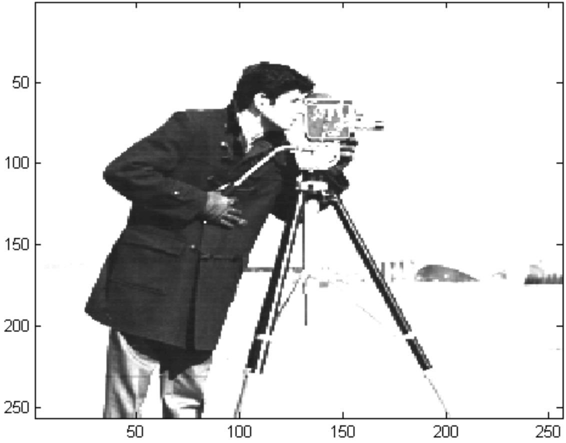
OBJETIVO

eliminar el ruido de los coeficientes wavelet

De-Noising by Soft-Thresholding, David L. Donoho. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 41, NO. 3, MAY 1995.

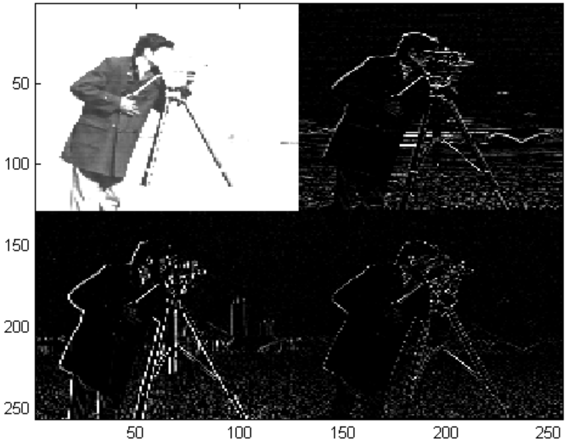
Transformada wavelet discreta 2-D

Realizar TWD 1-D por filas y luego por columnas



Transformada wavelet discreta 2-D

Un paso de la TWD 2-D de Haar



Reducción wavelet

Algoritmo

1. Análisis : Aplicar la TWD discreta a una señal de datos con ruido de longitud 2^N, $N \in \mathbb{Z}$
2. Redución (Shrinkage): Aplicar función de reducción $\equiv$ umbralización de los coeficientes wavelet

$$D(d_i^j, \lambda_j^*) = \begin{cases} sgn(d_i^j)(|d_i^j| - \lambda_j^*), \text{ si } |d_i^j| > \lambda_j^* \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$$

3. Síntesis: Reconstruir la señal filtrada

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2^J-1} c_i^j \varphi_i^J(x) + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^j-1} D(d_i^j, \lambda_j^*) \psi_i^j.$$

Reducción wavelet

Algunas funciones de redución

$D(x) = \mu x,\ \mu \in [0,1]$	Umbralización lineal
$D(x,\lambda_j^*) = \begin{cases} sgn(x)(\lvert x\rvert - \lambda_j^*), \text{ si } \lvert x\rvert > \lambda_j^* \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$	Umbralización suave
$D(x,\lambda_j^*) = \begin{cases} x - \frac{(\lambda_j^*)^2}{x}, \text{ si } \lvert x\rvert > \lambda_j^* \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$	Umbralización garrote
$D(x,\lambda_j^*) = \begin{cases} x, \text{ si } \lvert x\rvert > \lambda_j^* \\ 0, \text{ si no} \end{cases}$	Umbralización fuerte

Reducción wavelet

Consideraciones

- Dados $f = (f_i)_{i=0}^{N-1}$, $N = 2^J$
- Haciendo un paso de la TWD de Haar con $c_i^0 = f_i$
- eliminando los supraíndices $j = 0, j = 1$

Reducción wavelet

Reducción para la TWD de Haar (Una combinación)

- $$\mathbf{u}^+ = (u_i^+)_i^{N-1} = 0$$

- $$u_2^+ i = \frac{f_{2i} + f_{2i+1}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} D(\frac{f_{2i} - f_{2i+1}}{\sqrt{2}})$$

- $$u_{2i+1}^+ = \frac{f_{2i} + f_{2i+1}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} D(\frac{f_{2i} - f_{2i+1}}{\sqrt{2}})$$

- $$u_{2i-1}^- = \frac{f_{2i-1} + f_{2i}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} D(\frac{f_{2i-1} - f_{2i}}{\sqrt{2}})$$

- $$u_{2i}^- = \frac{f_{2i-1} + f_{2i}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} D(\frac{f_{2i-1} - f_{2i}}{\sqrt{2}})$$

Reducción wavelet

Promediando $\Rightarrow$ Transformación resultante por componente

- $$u_i = \frac{u_i^+ + u_i^-}{2} \tag{1}$$

- $$u_i = \frac{f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} D\left(\frac{f_i - f_{i+1}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} D\left(\frac{f_{i-1} - f_i}{\sqrt{2}}\right)$$

AL FIN !!!!

Relación entre coeficiente de difusión y función de reducción wavelet

Esquema de difusión explícito (un paso)

- $u_i^0 = f_i$, $u_i^1 = u_i$
- $u_i = \frac{f_{i-1}+2f_i+f_{i+1}}{4} + \frac{f_i - f_{i+1}}{4} - \frac{f_{i-1}-f_i}{4} - \tau g(|f_i - f_{i+1}|)(f_i - f_{i+1}) + \tau g(|f_{i-1} - f_i|)(f_{i-1} - f_i)$
- $u_i = \frac{f_{i-1}+2f_i+f_{i+1}}{4} + (f_i - f_{i+1})(\frac{1}{4} - \tau g(|f_i - f_{i+1}|)) - (f_{i-1} - f_i)(1 - \tau g(|f_{i-1} - f_i|))$

u_i de la DA no lineal coincide con u_i de la reducción wavelet

$\Leftrightarrow$

- $\frac{1}{2\sqrt{2}} D(\frac{x}{\sqrt{2}}) = x(\frac{1}{4} - \tau g(|x|))$

AL FIN !!!!

Relación entre coeficiente de difusión y función de reducción wavelet

Esquema de difusión explícito (un paso)

- $u_i^0 = f_i$, $u_i^1 = u_i$
- $u_i = \frac{f_{i-1}+2f_i+f_{i+1}}{4} + \frac{f_i-f_{i+1}}{4} - \frac{f_{i-1}-f_i}{4} - \tau g(|f_i - f_{i+1}|)(f_i - f_{i+1}) + \tau g(|f_{i-1} - f_i|)(f_{i-1} - f_i)$
- $u_i = \frac{f_{i-1}+2f_i+f_{i+1}}{4} + (f_i - f_{i+1})(\frac{1}{4} - \tau g(|f_i - f_{i+1}|)) - (f_{i-1} - f_i)(1 - \tau g(|f_{i-1} - f_i|))$

u_i de la DA no lineal coincide con u_i de la reducción wavelet

$\Leftrightarrow$

- $\frac{1}{2\sqrt{2}} D(\frac{x}{\sqrt{2}}) = x(\frac{1}{4} - \tau g(|x|))$

AL FIN !!!!

Equivalencia

- Un paso de la discretización explícita de la DA no lineal es equivalente a realizar la reducción wavelet en el primer nivel de la TWD
- $$D_{\lambda_1^*}(x) = x(1 - 4\tau g(|\sqrt{2}x|))$$
- $$g(|x|) = \frac{1}{4\tau} - \frac{\sqrt{2}}{4\tau x} D_{\lambda_1^*}(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

Referencias

1. M. Borroto-Fernández, M. González-Hidalgo and A. León-Mecías. *New estimation method of the contrast parameter for the Perona Malik diffusion equation*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering: Imaging Visualization, 2014 Taylor Francis, http://dx.doi.org/10.1080/21681163.2014.974289.
2. Bovik Al *The Essential Guide to Image Processing*. Elsevier 2009.
3. Mrázek P., Weickert J., Steidl G. *Correspondes between Wavelet Shrinkage and Nonlinear Diffusion*. L. D. Griffin and M. LillHolm (Eds):Scale-Space 2003, LNCS 2695, pp. 101-116, 2003.
4. David L. Donoho *De-Noising by Soft-Thresholding*. IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 41, NO. 3, MAY 1995.
5. P. Perona and J. Malik. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., PAMI-12:629–639, 1990.
6. Weickert Joachim, *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. B. G. Teubner Stuttgart, Copyright 2008.

Descubriendo la relación entre dos paradigmas: Filtrado por difusión no lineal y por reducción wavelet.

Ángela Mireya León Mecías

Universidad de La Habana

IV Enuentro Cuba-México, 19 de Enero 2015