Tarea V de Álgebra Lineal I
Semestre 2020-I
24 de octubre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Yanh Vissuet, Mariana Garduño y Carlos Ochoa

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo.
   (i) El rango de una matriz es igual al número de sus columnas no nulas.
   (ii) El producto de dos matrices siempre tiene rango igual al menor entre el rango de las dos matrices.
   (iii) La matriz nula cero de $m \times n$ es la única matriz de $m \times n$ con rango 0.
   (iv) Las operaciones elementales de columna no necesariamente preservan el rango de una matriz.
   (v) El rango de una matriz es igual al máximo número de renglones linealmente independientes de la matriz.
   (vi) El rango de una matriz de $n \times n$ es a lo más n.

2. Demuestre el inciso (b) del Teorema 3.4 visto en clase: Si $A \in M_{m\times n}(F)$ y P es una matriz invertible de $m \times m$, entonces $rango(PA) = rango(A)$. *Sugerencia:* Utilice el Ejercicio **??** con $T = L_P$.

3. Calcule el rango de las siguientes matrices y encuentre sus inversas cuando existan.
   (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. En cada uno de los siguientes incisos determine si T es invertible y encuentre T^{-1} si existe.
   (i) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ definida como $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + a_1x^2$;
   (ii) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida como $T(A) = (tr(A), tr(A^t), tr(EA), tr(AE))$, donde $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Exprese la matriz invertible $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

6. (i) Demuestre que para cualquier $A \in M_{m\times n}(F)$, $rango(A) = 0$ si y sólo si A es la matriz cero.
   (ii) Demuestre que para cualesquiera $A \in M_{m\times n}(F)$ y $c \in F \setminus \{0\}$, $rango(cA) = rango(A)$.
   (iii) Demuestre que las operaciones elementales de columna preservan el rango.
   (iv) Demuestre que el rango de cualquier matriz es igual al máximo número de renglones linealmente independientes, es decir, el rango de una matriz es la dimensión del subespacio generado por sus renglones.
   (v) Los renglones y columnas de cualquier matriz generan subespacios de la misma dimensión, dimensión que es el rango de la matriz.

7. Sean B' y D' matrices de $m \times n$, y sean B y D matrices de $(m+1) \times (n+1)$, definidas como

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{y} \quad D = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

   Demuestre que si B' se puede transformar en D' por medio de una operación elemental de renglón (columna), entonces B se puede transformar en D por medio de una operación elemental de renglón (columna).

8. Sean $T, U : V \to W$ transformaciones lineales con V y W espacios vectoriales cualquiera.
   (i) Demuestre que $R(T + U) \subseteq R(T) + R(U)$.
   (ii) Demuestre que si W es de dimensión finita, entonces $rango(T + U) \leq rango(T) + rango(U)$.
   (iii) Deduzca del inciso anterior que para cualesquiera matrices A y B de $m \times n$, se tiene que $rango(A+B) \leq rango(A) + rango(B)$.

9. Demuestre que si B es una matriz de 3×1 y C es una matriz de 1×3, entonces la matriz BC de 3×3 tiene rango a lo más 1. Inversamente, demuestre que si A es una matriz cualquiera de 3×3 con rango 1, entonces existen matrices B de 3×1 y C de 1×3 tales que $A = BC$.

10. (i) Sea $A \in M_{m\times n}(F)$ con rango m. Demuestre que existe una matriz B de $n \times m$ tal que $AB = I_m$.

    (ii) Sea $B \in M_{n\times m}(F)$ con rango m. Demuestre que existe una matriz A de $m \times n$ tal que $AB = I_n$.

11. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, <u>dando prueba o contraejemplo</u>:

    (i) Todo sistema de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.

    (ii) Todo sistema de ecuaciones lineales tiene a lo más una solución.

    (iii) Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene al menos una solución.

    (iv) Todo sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene al menos una solución.

    (v) Todo sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene a lo más una solución.

    (vi) Existen sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas que tienen una infinidad de soluciones.

    (vii) Si el sistema homogéneo asociado a un sistema de ecuaciones lineales tiene solución, entonces el sistema dado tiene solución.

    (viii) Si la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas es invertible, entonces el sistema tiene soluciones no cero.

    (ix) El conjunto solución de cualquier sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un subespacio de F^n.

    (x) Si la matriz de coeficientes de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene rango m, entonces el sistema es consistente, es decir, tiene solución.

12. Diga si los siguientes sistemas tienen solución y si la tienen, encuentre todas las soluciones:

    (i) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

    (ii) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

    (iii) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

    (iv) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}$$

13. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a, b, c) = (a+b, b-2c, a+2c)$. Para cada uno de los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ siguientes, determine si $v \in R(T)$.

    (i) $v = (1, 3, -2)$

    (ii) $v = (2, 1, 1)$.

14. Demuestre que un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución si y sólo si $b \in R(L_A)$.

15. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, <u>dando prueba o contraejemplo</u>:

    (i) Si $(A'|b')$ se obtiene de $(A|b)$ por medio de un número finito de operaciones elementales de columna, entonces los sistemas $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes.

    (ii) Si $(A'|b')$ se obtiene de $(A|b)$ por medio de un número finito de operaciones elementales de renglón, entonces los sistemas $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes.

    (iii) Si A es una matriz de $n \times n$ con rango n, entonces la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

    (iv) Si $(A|b)$ es escalonada reducida por renglones, entonces el sistema $Ax = b$ es consistente.

    (v) Sea $Ax = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tal que la matriz aumentada del sistema es escalonada reducida por renglones. Si el sistema es consistente, entonces la dimensión del conjunto solución del sistema $Ax = \overline{0}$ es $n - r$ donde r es el número de renglones no nulos de A.

    (vi) Si una matriz A es transformada por medio de un número finito de operaciones elementales de renglón en una matriz A' que es escalonada reducida por renglones, entonces el rango de A es el número de renglones no nulos de A'.

16. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, dé todas sus soluciones y encuentre una base para el conjunto solución del sistema homogéneo correspondiente:

(i) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 8x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 9 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \end{array}$

(ii) $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & = & 6 \end{array}$

17. Suponga que la matriz aumentada del sistema $Ax = b$ se transforma por medio de un número finito de operaciones elementales de renglón en la matriz escalonada reducida por renglones $(A'|b')$.

    (i) Demuestre que $rango(A') \neq rango(A'|b')$ si y sólo si la matriz $(A'|b')$ tiene un renglón en el que la única entrada no nula está en la última columna.

    (ii) Deduzca que $Ax = b$ es consistente si y sólo si $(A'|b')$ no tiene ningún renglón cuya única entrada no nula esté en la última columna.

18. Utilizando el ejercicio anterior, determine si los siguientes sistemas de ecuaciones son consistentes y si son consistentes encuentre todas las soluciones. Además encuentre una base para el conjunto solución del sistema homogéneo correspondiente.

    (i) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}$

    (ii) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \end{array}$

19. Sea W el subespacio del espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que consiste de todas las matrices simétricas. El conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a W. Encuentre un subconjunto de S que sea base para W.

20. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^5$ tal que $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0\}$.

    (i) Compruebe que $S = \{(0, 1, 1, 1, 0)\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V.

    (ii) Extienda S a una base de V.

21. Sea V el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & - & 3x_5 & + & x_6 & = 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & + & 4x_6 & = 0 \end{array}$

    (i) Sabemos entonces que V es un espacio vectorial. Compruebe que $S = \{(0, -1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1, 0)\}$ es un subconjunto linealmente independiente de V.

    (ii) Extienda S a una base de V.

22. Demuestre el Corolario del Teorema 3.16: La forma escalonada reducida por renglones de una matriz es única.

23. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contrajemplo.

    (i) Si dos renglones de una matriz cuadrada A son idénticos, entonces $\det(A) = 0$.

    (ii) Si B es una matriz que se obtiene de una matriz cuadrada A al intercambiar cualesquiera dos renglones, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

    (iii) Si B es una matriz que se obtiene de una matriz cuadrada A al multiplicar cualquier renglón por un escalar, entonces $\det(B) = \det(A)$.

    (iv) Si B es una matriz que se obtiene de una matriz cuadrada A al sumar k veces el renglón i al renglón j, entonces $\det(B) = k\det(A)$.

    (v) Si $A \in M_{n\times n}(F)$, entonces $\det(-A) = \det(A)$. Si es falso, ¿bajo qué condiciones es verdadero?

    (vi) Si $A \in M_{n\times n}(F)$ tiene rango n, entonces $\det(A) = 0$.

24. Encuentre el valor de k que satisfaga la siguiente ecuación: $\det \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

25. Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

    (i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -1 & 2+i & 3 \\ 1-i & i & 1 \\ 3i & 2 & -1+i \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -12 \\ -5 & 12 & -14 & 19 \\ -9 & 22 & -20 & 31 \\ -4 & 9 & -14 & 15 \end{pmatrix}$

26. Demuestre que el determinante de una matriz cuadrada triangular superior es igual al producto de las entradas de su diagonal.

27. Demuestre que si A es una matriz cuadrada que tiene un renglón cuyas entradas son todas cero, entonces $\det(A) = 0$.

28. Demuestre que para cualquier $A \in M_{n\times n}(F)$, $\det(kA) = k^n \det(A)$.

29. Demuestre que si E es una matriz elemental, entonces $\det(E^t) = \det(E)$.

30. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ las columnas de la matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ y sea B la matriz cuyos renglones son $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ (en este orden). Calcule el determinante de B en términos del determinante de A.

31. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.

    (i) Si E es una matriz elemental, entonces $\det(E) = \pm 1$.

    (ii) Una matriz $M \in M_{n\times n}(F)$ es invertible si y sólo si $\det(M) = 0$.

    (iii) Una matriz $M \in M_{n\times n}(F)$ tiene rango n si y sólo si $\det(M) \neq 0$.

    (iv) Para cualquier matriz $A \in M_{n\times n}(F)$, $\det(A^t) = -\det(A)$.

    (v) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas se puede resolver utilizando la regla de Cramer.

32. Revise y complete las demostraciones vistas en clase de las siguientes afirmaciones, analizando el argumento inductivo que se usa en el caso en que la matriz es invertible.

    (i) Para cualesquiera matrices $A, B \in M_{n\times n}(F)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. (Complete la prueba, demostrando que si A es una matriz elemental de tipo 2 o de tipo 3, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.)

    (ii) Para cualquier matriz $A \in M_{n\times n}(F)$, $\det(A^t) = \det(A)$.

33. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando la regla de Cramer:

    (i) $\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$
    donde $a_{11}a22 - a_{12}a_{21} \neq 0$.

    (ii) $\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & - & x_2 & & & = & 12 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -8 \end{array}$

34. Demuestre que una matriz cuadrada triangular superior es invertible si y sólo si todas sus entradas diagonales son no nulas.

35. Una matriz $M \in M_{n\times n}(F)$ se llama *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $M^k = O$, donde O es la matriz cero de $n \times n$. Demuestre que si M es nilpotente, entonces $\det(M) = 0$.

36. Una matriz $M \in M_{n\times n}(F)$ es *antisimétrica* si $M^t = -M$. Demuestre que si M es antisimétrica y n es impar, entonces M no es invertible. ¿Qué sucede si n es par?

37. Una matriz $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se llama *ortogonal* si $QQ^t = I_n$. Demuestre que si Q es ortogonal, entonces $\det(Q) = \pm 1$.

38. Para $M \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $\overline{M}$ la matriz tal que para toda i y j, $(\overline{M})_{ij} = \overline{M_{ij}}$, donde $\overline{M_{ij}}$ es el conjugado complejo de M_{ij}.

    (i) Demuestre que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.

    (ii) Una matriz $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ se llama *unitaria* si $QQ^* = I_n$, donde $Q^* = \overline{Q^t}$. Demuestre que si Q es unitaria, entonces $|\det(Q)| = 1$.

39. Demuestre que si A y B son matrices similares, entonces $\det(A) = \det(B)$.

40. Utilice determinantes para probar que si $A, B \in M_{n\times n}(F)$ son tales que $AB = I_n$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$.

41. Sean $A, B \in M_{n\times n}(F)$ tales que $AB = -BA$. Demuestre que si n es impar y F es un campo con característica distinta de 2, entonces A o B no es invertible.

42. (i) Suponga que $M \in M_{n\times n}(F)$ se puede escribir en la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & I \end{pmatrix}$, donde A es una matriz cuadrada. Demuestre que entonces $\det(M) = \det(A)$.

    (ii) Suponga que $M \in M_{n\times n}(F)$ se puede escribir en la forma $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$, donde A y C son matrices cuadradas. Demuestre que entonces $\det(M) = \det(A) \cdot \det(C)$.

43. Sea $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un subconjunto de n vectores distintos de F^n y sea B la matriz cuya j-ésima columna es u_j. Demuestre que β es una base de F^n si y sólo si $\det(B) \neq 0$.

44. Sean $c_0, c_1, ..., c_n$ escalares distintos de un campo infinito F. Defínase $T : P_n(F) \to F^{n+1}$ como $T(f) = (f(c_0), f(c_1), ..., f(c_n))$. Por un ejercicio de una tarea anterior, usando los polinomios de Lagrange, sabemos que T es un isomorfismo. Sea β la base ordenada canónica de $P_n(F)$ y sea γ la base ordenada canónica de F^{n+1}.

(i) Demuestre que $M = [T]_\beta^\gamma$ tiene la forma $\begin{pmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \cdots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}$.

Una matriz con esta forma se llama matriz de *Vandermonde*.

(ii) Utilice que T es isomorfismo para demostrar que $\det(M) \neq 0$.

(iii) Demuestre que $\det(M) = \prod_{0 \le i < j \le n}(c_j - c_i)$, el producto de los términos $c_j - c_i$ para $0 \le i < j \le n$.

45. Sean $y_1, ..., y_n$ funciones lineal. indep. de C^∞, donde C^∞ es el subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que sus derivadas de cualquier orden son continuas. Para cada $y \in \mathrm{C}^\infty$, defínase $T(y) \in \mathrm{C}^\infty$ como $(T(y))(t) = \det \begin{pmatrix} y(t) & y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y'(t) & y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)}(t) & y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \cdots & y_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$.

Este determinante se llama el *Wronskiano* de y, y_1, y_2,$\dots$, y_n.

(i) Demuestre que $T : \mathrm{C}^\infty \to \mathrm{C}^\infty$ es una transformación lineal.

(ii) Demuestre que $L(\{y_1, y_2, ..., y_n\}) \subseteq N(T)$.

46. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Calcule $\det(A + tI_n)$.

47. (i) La *adjunta clásica* de una matriz $A \in M_{2\times2}(F)$ es la matriz $C = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$.

Sea $A \in M_{2\times2}(F)$. Demuestre lo siguiente.

(a) $CA = AC = \det(A)I_2$.

(b) $\det(C) = \det(A)$.

(c) La adjunta clásica de A^t es C^t.

(d) Si A es invertible, entonces $A^{-1} = (\det(A))^{-1}C$.

(ii) La *adjunta clásica* de una matriz cuadrada A es la traspuesta de la matriz cuya entrada ij es el cofactor ij de A. Sea C la adjunta clásica de $A \in M_{n\times n}(F)$. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Demuestre lo siguiente.

(a) $\det(C) = (\det(A))^{n-1}$.

(b) La adjunta clásica de A^t es C^t.

(c) Si A es una matriz invertible triangular superior, entonces C y A^{-1} son ambas triangulares superiores.