Tarea V de Teoría de Conjuntos I

Semestre 2018-2

14 de mayo de 2018

Profra: Gabriela Campero Arena Ayudte: Manuel Zúñiga

Axioma de Elección (AE)

$\forall A(\varnothing \notin A \Rightarrow \exists f(f \text{ es función } \wedge dom(f) = A \wedge \forall x \in A(f(x) \in x)))$.

Equivalentes del Axioma de Elección

Axioma de Elección Conjuntista (AEC)

$\forall A((\varnothing \notin A \wedge \forall z, w \in A(z \neq w \Rightarrow z \cap w = \varnothing)) \Rightarrow \exists B \forall x \in A(x \cap B \text{ es unitario}))$.

Axioma de Elección Multiplicativo (AEM)

$\forall M(\varnothing \notin M \Rightarrow \prod M = \{f | f : M \to \bigcup M \wedge \forall B \in M(f(B) \in B)\} \neq \varnothing)$.

Axioma de Elección Infinito (AEI)

$\forall A((\varnothing \notin A \wedge A \text{ es infinito}) \Rightarrow \exists f(f \text{ es función } \wedge dom(f) = A \wedge \forall x \in A(f(x) \in x)))$.

Axioma de Elección para el conjunto Potencia (AEP)

$\forall A \exists F(F \text{ es función } \wedge dom(F) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \wedge \forall B \subseteq A(f(B) \in B))$.

Axioma de Elección Relacional (AER)

$\forall R(R \text{ es relación} \Rightarrow \exists F(F \text{ es función } \wedge F \subseteq R \wedge dom(F) = dom(R)))$.

Teorema del Buen Orden (TBO)

$\forall A \exists r(r \subseteq A^2 \wedge \langle A, r\rangle \text{ es un cobo})$.

Lema de Zorn (ZORN)

$\forall A \forall r((A \neq \varnothing \wedge r \subseteq A^2 \wedge \langle A, r\rangle \text{ es un copo } \wedge \forall \mathcal{C} \subseteq A(\mathcal{C} \text{ es cadena } \wedge \exists b \in A \forall x \in \mathcal{C}(\langle x, b\rangle \in r \vee x = b))) \Rightarrow \exists m \in A(\forall y \in A \langle m, y\rangle \notin r))$.

Recordatorio de definiciones de copo, copo$'$ (copo reflexivo), cadena, etc.

Si A es un conjunto y $r \subseteq A^2$, decimos que $\langle A, r\rangle$ es un *copo* si r es antirreflexiva en A y transitiva. Si A es un conjunto y $r \subseteq A^2$, decimos que $\langle A, r\rangle$ es un *copo$'$* si r es reflexiva en A, transitiva y antisimétrica. Sabemos por un ejercicio de una tarea anterior que si $\langle A, r\rangle$ es un copo, entonces $\langle A, r'\rangle$ es un copo$'$, donde $r' = r \cup \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$; y que si $\langle A, r\rangle$ es un copo$'$, entonces $\langle A, r'\rangle$ es un copo, donde $r' = r \setminus \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$. Entonces dependiendo de si la relación r es reflexiva o antirreflexiva, los conceptos de copo y copo$'$ son 'equivalentes'.

Si $\langle A, r\rangle$ es un copo, entonces una *cadena* $\mathcal{C}$ de A es un subconjunto de A tal que $\forall x, y \in \mathcal{C}(\langle x, y\rangle \in r \vee \langle y, x\rangle \in r \vee x = y)$, es decir r es tricotómica en $\mathcal{C}$. Si $\langle A, r\rangle$ es un copo$'$, entonces una *cadena* $\mathcal{C}$ de A es un subconjunto de A tal que $\forall x, y \in \mathcal{C}(\langle x, y\rangle \in r \vee \langle y, x\rangle \in r)$, es decir, todos los elementos de $\mathcal{C}$ son r-comparables.

Entonces el *Lema de Zorn (ZORN)* también se puede enunciar como:

$\forall A \forall r((A \neq \varnothing \wedge r \subseteq A^2 \wedge \langle A, r\rangle \text{ es un copo}' \wedge \forall \mathcal{C} \subseteq A(\mathcal{C} \text{ es cadena } \wedge \exists b \in A \forall x \in \mathcal{C}(\langle x, b\rangle \in r))) \Rightarrow \exists m \in A(\forall y \in A(\langle m, y\rangle \in r \Rightarrow m = y)))$.

Ejercicios

1. Demuestre las siguientes implicaciones:

(i)	$AE \iff AEC$	(iii)	$AE \iff AEI$	(v)	$AE \iff AER$	(vii)	$ZORN \Rightarrow TBO$
(ii)	$AE \iff AEM$	(iv)	$AE \iff AEP$	(vi)	$TBO \Rightarrow AE$		

2. Responda a las siguientes preguntas, justificando su respuesta. Si usted está trabajando en ZF *sin* el Axioma de Elección, ¿puede usted elegir un elemento de...
   (i) un conjunto finito?
   (ii) un conjunto infinito?
   (iii) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos unitarios?
   (iv) cada miembro de un conjunto infinito de pares de zapatos?
   (v) cada miembro de un conjunto infinito de pares de calcetines (¡de los de deporte!)?
   (vi) cada miembro de un conjunto finito de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?
   (vii) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos si cada uno de los miembros es finito?
   (viii) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de racionales?
   (ix) cada miembro de un conjunto numerable de conjuntos si cada uno de los miembros es numerable?
   (x) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos finitos de reales?
   (xi) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?
   (xii) cada miembro de un conjunto numerable de conjuntos si cada uno de los miembros es infinito?
   (xiii) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de reales?
   (xiv) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de dos elementos cuyos miembros son conjuntos de naturales?

(xv) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de dos elementos cuyos miembros son conjuntos de reales?

(xvi) cada miembro de un conjunto infinito de conjuntos de tres elementos cuyos miembros son conjuntos de racionales?

3. Demuestre lo siguiente, diciendo dónde utiliza AE:
   (i) Sean A y B conjuntos cualesquiera. Si $f : A \to B$ es sobre, entonces existe una función inyectiva de B en A.
   (ii) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
4. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes, diciendo si utiliza AE y dónde (recuerde que en algunas equivalencias AE sólo se utiliza para 'un lado'):
   (a) $f : X \to Y$ es sobre;
   (b) $f : X \to Y$ tiene una inversa derecha, es decir, hay $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$.
5. ¿Es cierto que alguno de los incisos (o ambos) del ejercicio anterior implican el AE? Es decir, ¿el inciso (a) es equivalente a AE?, ¿el inciso (b) es equivalente a AE?
6. (i) Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes, diciendo si utiliza AE y dónde:
      (a) A es infinito;
      (b) A tiene un subconjunto numerable.
   (ii) Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes, diciendo si utiliza AE y dónde:
      (a) A es infinito;
      (b) A es Dedekind-infinito.
7. (i) Usando ZORN, demuestre que la dominancia es total (DT), es decir, que para cualesquiera conjuntos A y B, se tiene que $A \preccurlyeq B$ o que $B \preccurlyeq A$.
   (ii) Usando AEM y ZORN, demuestre que la dominancia es un 'buen orden', es decir, que $\forall M(M \neq \varnothing \Rightarrow \exists A \in M \forall B \in M(A \preccurlyeq B))$.
8. (i) Usando ZORN, demuestre que si A es un conjunto infinito, entonces $A \times A \sim A$.
   (ii) Demuestre que si κ y λ son cardinales uno infinito y el otro no cero, entonces $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
   (iii) (a) Demuestre que si A y B son conjuntos tales que $A \subseteq B$, B es infinito y $|A| < |B|$, entonces $|B \setminus A| = |B|$.
      (b) Diga cuántos números irracionales hay, justificando su respuesta.
      (c) Diga cuántos números trascendentes hay, justificando su respuesta.
      (d) Diga cuántas funciones *no* inyectivas de ω en ω hay, justificando su respuesta.
   (iv) Demuestre que si λ y κ son cardinales tales que $\lambda \geq \aleph_0$ y $2 \leq \kappa \leq \lambda$, entonces $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda = (\lambda^+)^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = (\kappa^\kappa)^\lambda$.
   (v) Demuestre que si A es infinito, entonces existen A_1 y A_2 subconjuntos no vacíos de A tales que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A = A_1 \cup A_2$ y $|A_1| = |A_2| = |A|$.
   (vi) (a) Demuestre que si A es infinito, existe una partición de A en $|A|$ subconjuntos de A cada uno de cardinalidad $|A|$.
      (b) Defina una partición de $\mathbb{R}$ en $|\mathbb{R}|$ subconjuntos cada uno de cardinalidad $|\mathbb{R}|$. Es decir, defina un conjunto $\{A_r : r \in \mathbb{R}\}$ tal que $\forall r \in \mathbb{R}(\varnothing \subsetneqq A_r \subseteq \mathbb{R})$, $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}(r_1 \neq r_2 \Rightarrow A_{r_1} \cap A_{r_2} = \varnothing)$, $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} A_r = \mathbb{R}$, y $\forall r \in \mathbb{R}(|A_r| = |\mathbb{R}|)$.
      (c) Dé una partición *explícita* de ω en $\aleph_0$ subconjuntos cada uno de cardinalidad $\aleph_0$.
9. Si A es un conjunto infinito y κ es un cardinal tal que $\kappa \leq |A|$, ¿cuántos subconjuntos de A de cardinalidad κ hay? Justifique su respuesta. *Notación:* Muchas veces se usa $[A]^\kappa$ para denotar los subconjuntos de A de cardinalidad κ. *Sugerencia:* Si K es un conjunto tal que $|K| = \kappa$ y $f : K \to A$, entonces $f \subsetneqq K \times A$ y ¿cuál es la cardinalidad de f?
10. Sea $\langle A, r\rangle$ un coto. Demuestre que $\langle A, r\rangle$ es un cobo si y sólo si *no* existe una sucesión $\{a_n | n \in \omega\}$ con $a_n \in A$ tal que $\forall n \in \omega(a_{n+1}\ r\ a_n)$. Diga si utiliza el Axioma de Elección y si sí, dónde. *Sugerencia:* Contrapositivas.
11. Diga qué dice la Hipótesis del Continuo y qué se sabe de ella.
12. Pruebe la equivalencia de los siguientes pares de afirmaciones especificando si y dónde utiliza el Axioma de Elección:
   (i) (a) $\forall S \subseteq \mathbb{R}\ [S \prec \omega$ ó $S \sim \omega$ ó $S \sim \mathbb{R}]$;
      (b) $\nexists Y\ [\omega \prec Y$ y $Y \prec \mathbb{R}]$.
   (ii) Sea A un conjunto infinito.
      (a) $\forall S \subseteq \mathcal{P}(A)\ [S \prec A$ ó $S \sim A$ ó $S \sim \mathcal{P}(A)]$;
      (b) $\nexists Y\ [A \prec Y$ y $Y \prec \mathcal{P}(A)]$.
   (iii) Sea κ un cardinal infinito.
      (a) $\forall \lambda \leq 2^\kappa\ [\lambda \leq \kappa$ ó $\lambda = 2^\kappa]$;
      (b) $\nexists \lambda\ [\kappa < \lambda$ y $\lambda < 2^\kappa]$.
13. A la luz del ejercicio anterior, discuta lo que dice la Hipótesis del Continuo y si se necesita AE para enunciarla en sus formas 'equivalentes'.
14. Demuestre una de las aplicaciones más famosas del Lema de Zorn: Todo espacio vectorial tiene una base. Diga para qué espacios vectoriales no se necesita el Lema de Zorn para demostrar que tienen una base y para cuáles sí.