# Ejercicios para el Examen IV de Álgebra Superior I

Semestre 2020-I

7 de octubre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena

Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

## Funciones y sus gráficas

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Determine cuáles de las siguientes relaciones son funciones de $A$ en $B$, justificando su respuesta:

(i) $\{(1, 5), (3, 6)\}$.
(ii) $\{(1, 4), (2, 6), (3, 4)\}$.
(iii) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6)\}$.
(iv) $\{(1, 6), (2, 4), (3, 5)\}$.

2. Sean $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{\varnothing, a, b\}$, con $\varnothing \neq a \neq b \neq \varnothing$. Diga cuáles de las siguientes relaciones son funciones de $X$ en $Y$, justificando su respuesta:

(i) $\{(1, \varnothing), (2, \varnothing), (3, a), (1, b)\}$.
(ii) $\{(1, a), (2, b), (3, \varnothing), (1, a)\}$.
(iii) $\{(2, \varnothing), (3, \varnothing)\}$.

3. Diga cuál es el dominio e imagen de las siguientes relaciones y posteriormente diga si son funciones en ese dominio, justificando su respuesta.

(i) Sea $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donde $(x, y) \in R$ si y sólo si $x = y^2$.
(ii) Sea $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $(x, y) \in S$ si y sólo si $x + y$ es par.
(iii) Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea $S = \{(x, y) \in A^2 : x + 1 = y\}$.
(iv) Sea $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ y $R = \{(x, y) \in B^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
(v) Para cualquier conjunto $A$, la relación diagonal $\Delta_A$ también llamada la identidad.
(vi) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $S \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, donde $S = \{(X, B \setminus X) : X \in \mathcal{P}(A)\}$.

4. Grafique cada una de las siguientes funciones y determine su imagen, justificando su respuesta:

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dada por $f(n) = 2n$.
(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, dada por $f(n) = n^2 + 1$.
(iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(n) = n^2 + 1$.
(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 1$.
(v) $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, donde $f(x) = x^2 + 1$.
(vi) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = 3n + 2$.
(vii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n) = |n|$.
(viii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = 3x$.
(ix) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3\}$ y $g : A \times C \to \mathbb{Z}$, donde $g(x, y) = 3x - y$.
(x) Sean $A$ y $C$ como en el inciso anterior y $h : A \times C \to \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}$, donde $h(x, y) = 3x - y$.

## Tipos de funciones

5. Pruebe que $f : A \to B$ es sobre si y sólo si $\operatorname{im}(f) = B$.

6. Determine si las funciones del ejercicio 4 son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

7. Verifique que la función $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$ es una biyección.

8. Denotemos por $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de cualquier número real $x$, es decir, $\lfloor x \rfloor$ es el máximo entero menor o igual a $x$.

(i) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = \lfloor x \rfloor$. Demuestre que $g$ es sobre más no inyectiva.
(ii) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Demuestre que $f$ es biyectiva.

9. Sea $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Z}$ dada por $f\left(\frac{n}{m}\right) = 2^n 3^m$, donde $\frac{n}{m}$ es una fracción simplificada (es decir, $n$ y $m$ no tienen factores comunes). Demuestre que $f$ es una función inyectiva.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$. Determine las imágenes directas de los siguientes subconjuntos del dominio bajo $f$:

(i) $[-1, 1)$ (iii) $(-\infty, 1/2]$ (v) $[1, 10]$
(ii) $[0, 3]$ (iv) $[0, 3)$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$. Determine las preimágenes (o imágenes inversas) de los siguientes subconjuntos del codominio bajo $f$:

(i) $[-1, 1)$ (iii) $(-\infty, 1/2]$ (v) $[1, 10]$
(ii) $[0, 3]$ (iv) $[0, 3)$

12. Sean $X$ y $Y$ conjuntos cualesquiera y sea $f : X \to Y$. Demuestre lo siguiente.

(i) $f[\varnothing] = \varnothing$.
(ii) Si $A_1, A_2 \subseteq X$, entonces $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$.
(iii) Sea $I$ un subconjunto no vacío de los naturales, y para cada $i \in I$, sea $A_i \subseteq X$. Entonces, $f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$.
(iv) Sea $I$ un subconjunto no vacío de los naturales, y para cada $i \in I$, sea $A_i \subseteq X$. Entonces, $f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$.
(v) $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$.

(vi) Si $B_1, B_2 \subseteq Y$, entonces $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

(vii) Sea $I$ un subconjunto no vacío de los naturales, y para cada $i \in I$, sea $B_i \subseteq Y$. Entonces, $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} B_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

(viii) Sea $I$ un subconjunto no vacío de los naturales, y para cada $i \in I$, sea $B_i \subseteq Y$. Entonces, $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

13. Sean $X$ y $Y$ conjuntos, sea $f : X \to Y$. Demuestre lo siguiente:

(i) Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$.

(ii) Para todo $B \subseteq Y$, $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.

(iii) Para todo $A \subseteq X$, $f[X] \setminus f[A] \subseteq f[X \setminus A]$.

(iv) $f$ es inyectiva si y sólo si para todo $A \subseteq X$, $A = f^{-1}[f[A]]$.

(v) $f$ es sobre si y sólo si para todo $B \subseteq Y$, $f[f^{-1}[B]] = B$.

(vi) $f$ es biyectiva si y sólo si para todo $A \subseteq X$, $Y \setminus f[A] = f[X \setminus A]$.

14. Dé un ejemplo por cada uno de los siguientes incisos de conjuntos $X$, $Y$, un subconjunto $A$ de $X$ o subconjuntos $A_1$ y $A_2$ de $X$, y una función $f : X \to Y$ de forma que:

(i) $f[A_1] \cap f[A_2] \not\subseteq f[A_1 \cap A_2]$.

(ii) $f[X \setminus A] \subsetneqq Y \setminus f[A]$.

(iii) $f[X \setminus A] \cap (Y \setminus f[A]) = \varnothing$.

(iv) $Y \setminus f[A] \subsetneqq f[X \setminus A]$.

### Composición de funciones y funciones inversas

15. Sean $A$ y $B$ conjuntos cualesquiera y sea $f : A \to B$. Prueba que $\mathrm{id}_B \circ f = f$ y $f \circ \mathrm{id}_A = f$.

16. Dé un ejemplo de dos funciones $f$ y $g$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tales que $f \neq g$, pero $f \circ g = g \circ f$.

17. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(x) = x^2/2+1$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (es decir, $g(x)$ es el máximo entero no mayor que $x$).

(i) Defina $g \circ f$ y $f \circ g$;

(ii) determine $(g \circ f)(-2)$ y $(f \circ g)(-1/2)$.

18. (i) Sea $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, donde $f(x) = 1/(2-x)$. Demuestre que $f$ es invertible, después defina $f^{-1}$ y diga cuál es su dominio.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = (3x + b)/(x - 3)$ con $b \neq -9$. Demuestre que $f$ es invertible y muestre que $f^{-1} = f$.

19. Dé ejemplos de conjuntos $A$ y $B$ y funciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tales que:

(i) $g \circ f = id_A$, pero $f \circ g \neq id_B$;

(ii) $g \circ f \neq id_A$, pero $f \circ g = id_B$.

20. Sea $f : A \to B$ con $A \neq \varnothing$. Demuestre lo siguiente:

(i) $f$ es sobre si y sólo si $f$ tiene inversa derecha.

(ii) $f$ es inyectiva si y sólo si $f$ tiene inversa izquierda.

(iii) Supóngase que $f$ es inyectiva. Entonces para cualesquiera funciones $g_1, g_2 : C \to A$, si $f \circ g_1 = f \circ g_2$, se tiene que $g_1 = g_2$.

(iv) Supóngase que $f$ es sobre. Entonces para cualesquiera funciones $g_1, g_2 : B \to C$, si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, se tiene que $g_1 = g_2$.

(v) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones tales que ambas tienen inversas derechas. Demuestre que entonces $g \circ f$ tiene inversa derecha.

21. Para cada una de las siguientes funciones determine si tienen inversa, inversa izquierda o inversa derecha. En caso de que lo tengan encuentre una.

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 3$.

(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, definida por $f(n) = |n|$.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

22. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = n^2$.

(i) Exhiba dos inversas izquierdas distintas de $f$.

(ii) Muestre que $f$ no tiene inversa derecha.

23. Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos cualesquiera. Demuestre lo siguiente.

(i) Sean $B' \subseteq B$, $f : A \to B'$ y $g : B \to C$. Si $f$ y $g$ son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(ii) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Si $f$ y $g$ son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.

(iii) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Si $f$ y $g$ son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

24. Dé ejemplos de conjuntos $A$, $B$ y $C$ y de funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de forma que se cumpla lo siguiente (un ejemplo por inciso):

(i) $g$ es sobre, pero $g \circ f$ no es sobre;

(i) $f$ es inyectiva, pero $g \circ f$ no es inyectiva;

(i) $f$ es inyectiva, $g$ es sobre, pero $g \circ f$ no es ni inyectiva ni sobre;

(i) $f$ no es sobre, $g$ no es inyectiva, pero $g \circ f$ es biyectiva.

25. Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ conjuntos cualesquiera y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ y $h : C \to D$.

(i) Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces $f$ es inyectiva.

(ii) Demuestre que si $g \circ f$ es sobre, entonces $g$ es sobre.

(iii) Demuestre que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces $f$, $g$ y $h$ son biyectivas. *Sugerencia:* Demuestre primero que $g$ y $h$ son sobres, luego que $f$ y $g$ son inyectivas, después que $h$ es inyectiva y finalmente que $f$ es sobre.

(iv) Supongamos que $A = D$ y que $h \circ g \circ f$ y $f \circ h \circ g$ son sobres, mientras que $g \circ f \circ h$ es inyectiva. Demuestre que entonces $f$, $g$ y $h$ son biyectivas. *Sugerencia:* Demuestre primero que $f$ y $h$ son sobres, luego que $h$ es inyectiva, después que $g$ es sobre, que $f$ es inyectiva y finalmente que $g$ es inyectiva.