Tarea IV de Álgebra Lineal I
Semestre 2020-I
7 de octubre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Yanh Vissuet, Mariana Garduño y Carlos Ochoa

1. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:

   (i) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F con α y β bases ordenadas para V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ lineal e invertible. Entonces $[T]_\alpha^\beta$ es invertible y $([T]_\alpha^\beta)^{-1} = [T^{-1}]_\alpha^\beta$.

   (ii) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo F con α y β bases ordenadas para V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ lineal. Si $A = [T]_\alpha^\beta$, entonces $T = L_A$.

   (iii) $M_{2\times 3}(F)$ es isomorfo a F^5.

   (iv) $P_n(F)$ es isomorfo a $P_m(F)$ si y sólo si $n = m$.

   (v) Si A y B son matrices tales que $AB = I_n$, entonces A y B son invertibles.

   (vi) Sea $A \in M_{m\times n}(F)$ y sean β y γ bases ordenadas cualesquiera de F^n y F^m respectivamente. Entonces $[L_A]_\beta^\gamma = A$.

2. En los siguientes incisos diga si T es invertible, justificando su respuesta:

   (i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(a_1, a_2) = (a_1 - 2a_2, a_2, 3a_1 + 4a_2)$.

   (ii) $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida como $T(p(x)) = p'(x)$.

   (iii) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida como $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c & c+d \end{pmatrix}$

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de espacios vectoriales son isomorfos? Justifique su respuesta.

   (i) $M_{2\times 2}(F)$ y $P_3(F)$;

   (ii) $V = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$ y $\mathbb{R}^4$.

4. Sean A y B matrices de $n \times n$ y 0 la matriz cero de $n \times n$. Demuestre lo siguiente.

   (i) Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   (ii) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

   (iii) Recuerde que no siempre es cierto que si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$. Sin embargo, si A es invertible y $AB = 0$, entonces $B = 0$.

   (iv) Si $A^2 = 0$, entonces A no es invertible.

   (v) Suponga que $B \neq 0$ y que $AB = 0$. ¿Podría ser que A fuera invertible? Explique su respuesta.

   (vi) A es invertible si y sólo si L_A es invertible. Más aún, $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$.

   (vii) (a) Si AB es invertible (recuerde que $A, B \in M_{n\times n}(F)$), entonces A y B son invertibles. Dé un ejemplo de matrices arbitrarias A y B tales que AB sea invertible y A y B no lo sean.

   (b) Si $A, B \in M_{n\times n}(F)$ y $AB = I_n$, por el inciso anterior, sabemos que A y B son invertibles. Demuestre que $A^{-1} = B$ y que $B^{-1} = A$. Por lo tanto, para matrices cuadradas "una inversa por un lado" es "una inversa por ambos lados".

   (c) Enuncie y demuestre resultados análogos para transformaciones lineales definidas en espacios vectoriales de dimensión finita.

5. Demuestre que para todo espacio vectorial V de dimensión n sobre un campo F y toda base ordenada β de V, la transformación lineal $\phi_\beta : V \to F^n$ es un isomorfismo.

6. Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo F y sea $T : V \to W$ lineal.

   (i) Si T es un isomorfismo y β es una base de V, entonces $T[\beta]$ es base para W.

   (ii) Si V es de dimensión finita y siempre que β es base de V se tiene que $T[\beta]$ es base para W, entonces T es un isomorfismo.

7. Sean $B \in M_{n\times n}(F)$ invertible. Defínase $\Phi : M_{n\times n}(F) \to M_{n\times n}(F)$ como $\Phi(A) = B^{-1}AB$. Demuestre que Φ es un isomorfismo.

8. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita, sea $T : V \to W$ un isomorfismo y sea V_0 un subespacio de V. Demuestre lo siguiente.
   (I) $T(V_0)$ es un subespacio de W; y
   (II) $dim(V_0) = dim(T(V_0))$.
9. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en un espacio vectorial W de dimensión m sobre el campo F. Sean β y γ bases ordenadas de V y W respectivamente. Si $A = [T]_\beta^\gamma$, demuestre que $rango(T) = rango(L_A)$ y que $nulidad(T) = nulidad(L_A)$. *Sugerencia:* Recuerde el diagrama conmutativo visto en clase que afirma que $L_A\phi_\beta = \phi_\gamma T$ y use el ejercicio anterior.
10. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases ordenadas $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y $\gamma = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$, respectivamente. Por el teorema "de las lucesitas" (Teorema 2.8 de clase o 2.6 del Friedberg), existen transformaciones lineales $T_{ij} : V \to W$ tales que $T_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$
    (I) Demuestre que el conjunto $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ es una base para $\mathbb{L}(V, W)$.
    (II) Sea E^{ij} la matriz de $m \times n$ tal que la entrada que corresponde al i-ésimo renglón y j-ésima columna es 1 y todas las demás entradas son 0. Demuestre que $[T_{ij}]_\beta^\gamma = E^{ij}$.
    (III) Otra vez por el teorema "de las lucesitas", existe una transformación lineal $\Phi : \mathbb{L}(V, W) \to M_{m\times n}(F)$ tal que $\Phi(T_{ij}) = E^{ij}$. Demuestre que Φ es un isomorfismo.
11. Sea V un espacio vectorial cualquiera sobre el campo F con $V \neq \{\overline{0}\}$ y, como todo espacio vectorial tiene una base, sea S una base para V. Sea $\mathcal{C}(S, F) = \{f \in \mathcal{F}(S, F) : f(s) = 0$ para toda, salvo por un número finito, $s \in S\}$. Defínase $\Psi : \mathcal{C}(S, F) \to V$ como

$$\Psi(f) = \begin{cases} \overline{0}_V & \text{si } f \text{ es la función cero, y} \\ \sum\limits_{\substack{s\in S, \\ f(s)\neq 0}} f(s)s & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    Demuestre que Ψ es un isomorfismo. Por lo tanto, todo espacio vectorial no cero se puede ver como un espacio de funciones.
12. (I) Sea V un espacio vectorial y W un subespacio de V. Defina la función $\eta : V \to V/W$ como $\eta(v) = v + W$ (V/W es el espacio cociente de V módulo W, definido en el Ejercicio 24 de la Tarea 1.
       (a) Demuestre que η es una transformación lineal, que es sobre y que $N(\eta) = W$.
       (b) Si V es de dimensión finita, use el inciso (i) y el Teorema de la Dimensión para encontrar una fórmula que relacione $dim(V)$, $dim(W)$ y $dim(V/W)$.
    (II) Sea $T : V \to Z$ una transformación lineal de un espacio vectorial V *sobre* un espacio vectorial Z. Defina la función $\overline{T} : V/N(T) \to Z$ como $\overline{T}(v + N(T)) = T(v)$.
       (a) Demuestre que $\overline{T}$ está bien definida, i.e., si $v + N(T) = v' + N(T)$, entonces $T(v) = T(v')$.
       (b) Demuestre que $\overline{T}$ es lineal.
       (c) Demuestre que $\overline{T}$ es un isomorfismo.
       (d) Demuestre que $T = \overline{T}\eta$. *Sugerencia:* Dibuje un diagrama que represente esta conmutatividad.
13. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contrajemplo.
    (I) Toda matriz de cambio de coordenadas es invertible.
    (II) Sea T un operador lineal definido en un espacio vectorial V de dimensión finita, sean β y β' bases ordenadas para V y sea Q la matriz de cambio de coordenadas que cambia β'-coordenadas en β-coordenadas. Entonces $[T]_\beta = Q[T]_{\beta'}Q^{-1}$.
    (III) Sea T un operador lineal definido en un espacio vectorial V de dimensión finita y sean β y γ bases ordenadas para V. Entonces $[T]_\beta$ es similar a $[T]_\gamma$.
14. Para cada espacio vectorial y cada par de bases ordenadas β y β', encuentre la matriz de cambio de coordenadas que cambia β'-coordenadas en β-coordenadas. Después calcule la matriz de cambio de coordenadas que cambia β-coordenadas en β'-coordenadas y verifique que una es la inversa de la otra.

(I) En $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{e_1, e_2\}$ y $\beta' = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$.

(II) En $P_2(\mathbb{R})$, $\beta = \{1, x, x^2\}$ y $\beta' = \{a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0, c_2x^2 + c_1x + c_0\}$.

15. Sea T el operador lineal definido en $P_1(\mathbb{R})$ como $T(p(x)) = p'(x)$. Sea β la base canónica de $P_1(\mathbb{R})$ y sea $\beta' = \{1 + x, 1 - x\}$. Utilice el teorema visto en clase que relaciona $[T]_\beta$ con $[T]_{\beta'}$ y el hecho de que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ para calcular $[T]_{\beta'}$.

16. Para cada matriz A y base ordenada β, encuentre la matriz $[L_A]_\beta$. Además, encuentre una matriz invertible Q tal que $[L_A]_\beta = Q^{-1}AQ$.

    (I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

    (II) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

17. En $\mathbb{R}^2$, sea L la recta $y = mx$ con $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dé la definición explícita de T, donde

    (I) T es la reflexión de $\mathbb{R}^2$ en torno a L;

    (II) T es la proyección sobre L a lo largo de la recta perpendicular a L.

18. (I) Demuestre la siguiente generalización del Teorema 2.24 visto en clase (2.23 del Friedberg). Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita V en un espacio vectorial de dimensión finita W. Sean β y β' bases ordenadas para V, y γ y γ' bases ordenadas para W. Entonces $[T]_{\beta'}^{\gamma'} = P^{-1}[T]_\beta^\gamma Q$, donde Q es la matriz de cambio de coordenadas que cambia β'-coordenadas en β-coordenadas y P es la matriz de cambio de coordenadas que cambia γ'-coordenadas en γ-coordenadas.

    (II) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo F y sea $\beta = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ base para V. Sea $Q \in M_{n\times n}(F)$ invertible. Defínase para $1 \le j \le n$, $x'_j = \sum_{i=1}^n Q_{ij}x_i$ y sea $\beta' = \{x'_1, x'_2, ..., x'_n\}$. Demuestre que β' es una base para V y, por lo tanto, Q es la matriz de cambio de base que cambia β'-coordenadas en β-coordenadas.

    (III) Demuestre el inverso del primer inciso: Si $A, B \in Mm \times n(F)$ y existen matrices invertibles P y Q de $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente, tales que $B = P^{-1}AQ$, entonces existen espacios vectoriales V de dimensión n y W de dimensión m ambos sobre el campo F, bases ordenadas β y β' para V y γ y γ' para W, y una transformación lineal $T : V \to W$ tales que $A = [T]_\beta^\gamma$ y $B = [T]_{\beta'}^{\gamma'}$. *Sugerencia:* Sean $V = F^n$, $W = F^m$, $T = L_A$ y β y γ las bases ordenadas canónicas para F^n y F^m, respectivamente. Aplique el resultado del inciso (ii) para obtener bases ordenadas β' y γ' de β y γ vía Q y P, respectivamente.

19. Sean V un espacio vectorial y α, β y γ bases ordenadas para V.

    (I) Demuestre que si Q y R son las matrices de cambio de coordenadas que cambian α-coordenadas en β-coordenadas y β-coordenadas en γ-coordenadas respectivamente, entonces RQ es la matriz de cambio de coordenadas que cambia α-coordenadas en γ-coordenadas.

    (II) Demuestre que si Q cambia α-coordenadas en β-coordenadas, entonces Q^{-1} cambia β-coordenadas en α-coordenadas.

20. Sea $A \in M_{n\times n}(F)$ y sea γ una base ordenada para F^n. Entonces $[L_A]_\gamma = Q^{-1}AQ$, donde Q es la matriz de $n \times n$ tal que su j-ésima columna es el j-ésimo vector de γ.

Funcionales lineales

21. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando prueba o contraejemplo:

    (i) Toda transformación lineal es un funcional lineal.

    (ii) Un funcional lineal definido sobre un campo, puede ser representado como una matriz de 1×1.

    (iii) Todo espacio vectorial de dimensión finita es isomorfo a su espacio dual.

    (iv) Si T es un isomorfismo que va de V en V^*, y β es una base ordenada finita para V, entonces $T[\beta]{=}\beta^*$.

    (v) Si T es una transformación lineal de V en W, entonces el dominio de $(T^t)^t$ es V^{**}.

    (vi) Si V es isomorfo a W, entonces V^* es isomorfo a W^*.

    (vii) La derivada de una función puede ser considerada como un funcional lineal sobre el espacio vectorial de las funciones diferenciables.

    (viii) Un funcional lineal no nulo es siempre sobre.

(ix) Si f y g son funcionales lineales sobre un espacio vectorial V sobre F tales que $N(f) = N(g)$ (sus Kernels son iguales), entonces existe un escalar $\lambda \in F$ tal que $f = \lambda g$.

22. Sea $V = \mathbb{R}^3$, y defina f_1, f_2, $f_3 \in V^*$ como $f_1(x, y, z) = x - 2y$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$ y $f_3(x, y, z) = y - 3z$. Pruebe que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base para V^*, y después encuentre una base para V para la cual ésta sea la base dual.
23. Sean $V = P_1(\mathbb{R})$ y $W = \mathbb{R}^2$ y sean β y γ las bases ordenadas canónicas de V y W respectivamente. Definamos $T : V \to W$ como $T(p(x)) = (p(0) - 2p(1), p(0) + p'(0))$.
    (i) Para $f \in W^*$ definida como $f(a, b) = a - 2b$, calcule $T^t(f)$.
    (ii) Calcule $[T^t]_{\gamma^*}^{\beta^*}$, sin utilizar el Teorema 2 visto en clase (el Teorema 2.25 del Friedberg).
    (iii) Calcule $[T^t]_{\beta}^{\gamma}$ y su transpuesta, y compare sus resultados con los del inciso (ii).
24. Pruebe que una función $T : F^n \to F^m$ es lineal si y sólo si existen $f_1, f_2, ..., f_m \in (F^n)^*$ tales que $T(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ para toda $x \in F^n$. *Sugerencia*: Si T es lineal, defínase $f_i(x) = (g_iT)(x)$ para $x \in F^n$; esto es, $f_i = T^t(g_i)$ para $1 \le i \le m$, donde $g_1, g_2, ..., g_m$ es la base dual de la base canónica para F^m.
25. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre F, y sean ψ_1 y ψ_2 los isomorfismos entre V y V^{**} y W y W^{**} respectivamente, tal como los definimos en el Teorema 3 visto en clase (Teorema 2.26 del Friedberg). Sea $T : V \to W$ lineal, y definamos $T^{tt} = (T^t)^t$. Pruebe que el diagrama siguiente conmuta, es decir, pruebe que $\psi_2 T = T^{tt}\psi_1$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \psi_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ V^{**} & \xrightarrow{T^{tt}} & W^{**} \end{array}$$

Matrices elementales

26. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) I_n es una matriz elemental, para toda $n \in N^+$.
    (ii) El producto de dos matrices elementales de $n \times n$ es una matriz elemental de $n \times n$.
    (iii) La inversa de una matriz elemental es una matriz elemental.
    (iv) La suma de dos matrices elementales de $n \times n$ es una matriz elemental de $n \times n$.
    (v) Si B es una matriz que se puede obtener de la matriz A a través de una operación elemental de renglón, entonces A se puede obtener de B a través de una operación elemental de columna.
    (vi) Si B es una matriz que se puede obtener de la matriz A a través de una operación elemental de renglón, entonces A se puede obtener de B a través de una operación elemental de renglón.
    (vii) Si E es una matriz elemental que se obtiene de I_n a través de una operación elemental de renglón, entonces I_n se puede obtener de E a través de una operación elemental de columna.
27. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
    (i) Encuentre una operación elemental que transforma A en B.
    (ii) Encuentre una operación elemental que transforma B en C.
    (iii) A través de algunas otras operaciones elementales transforme C en I_3.
28. (i) Demuestre que toda matriz elemental de $n \times n$ se puede obtener por medio de al menos dos formas diferentes: a través de una operación elemental de renglón llevada a cabo a I_n, o a través de una operación elemental de columna llevada a cabo a I_n.
    (ii) Demuestre que E es una matriz elemental si y sólo si E^t es una matriz elemental.
    (iii) Sea $A \in M_{m \times n}(F)$. Demuestre que si B se puede obtener de A a través de una operación elemental de renglón (columna), entonces B^t se puede obtener de A^t a través de una operación elemental de columna (renglón).
29. Demuestre el Teorema 3.1 (del Friedberg) visto en clase al respecto de la equivalencia entre hacer una operación elemental de renglón (columna) a una matriz A y multiplicar a A por la izquierda (por la derecha) por una matriz elemental.
30. Demuestre que cualquier operación elemental de renglón (columna) de tipo 1 se puede obtener por una sucesión de tres operaciones elementales de renglón (columna) de tipo 3 seguida de una operación elemental de renglón (columna) de tipo 2.
31. Demuestre que cualquier operación elemental de renglón (columna) de tipo 2 se puede obtener al dividir algún renglón (columna) por un escalar no cero.
32. Sea $A \in M_{m \times n}(F)$. Demuestre que hay una sucesión de operaciones elementales de tipo 1 y tipo 3 tales que transforman a A en una matriz triangular superior.