Tarea IV del Seminario de Álgebra A

Semestre 2015-II

27 de mayo de 2015

Profra: Gabriela Campero Arena    Ayudtes: Manuel Alejandro Zúñiga y Jorge Garza

*Aviso:* El miércoles 3 de junio a las 11 am en el salón de clase será el último examen.

*Recomendación:* Termine pronto el calentamiento que los más formativos son los de después.

# Calentamiento

Sean $M$ un modelo etn de ZFE, $\mathbb{P}$ un orden parcial, $\mathbb{P} \in M$, $p, q \in \mathbb{P}$, $a \in M$, $\varphi, \psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas de la T.C., $G$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M$, y $\pi, \sigma, \tau_1, ..., \tau_n$ $\mathbb{P}$-nombres. Demuestre lo siguiente.

1. $i_G(\pi) \in i_G(\sigma)$ si y sólo si $\exists p \in G(\langle \pi, p \rangle \in \sigma)$ si y sólo si $\exists p \in G(p \Vdash \pi \in \sigma)$.
2. Si $p \Vdash \varphi_1, \ldots, p \Vdash \varphi_n$ y ZFE$\vdash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \varphi)$, entonces $p \Vdash \varphi$.
3. (i) Para ningún $r \in \mathbb{P}$, se tiene que $r \Vdash \varphi$ y $r \Vdash \neg\varphi$.
   (ii) Si $\varphi$ y $\psi$ son lógicamente equivalentes, entonces $p \Vdash \varphi$ si y sólo si $p \Vdash \psi$.
   (iii) Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leq p$, entonces $q \Vdash \varphi$.
   (iv) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$.
   (v) $p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ si y sólo si $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$; y $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ si y sólo si $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \neg\varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$.
4. (i) Si $p \Vdash \varphi$ o $p \Vdash \psi$, entonces $p \Vdash \varphi \vee \psi$.
   (ii) ¿Será cierto el recíproco del inciso anterior?
   (iii) $p \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si $\forall q \leq p \exists r \leq q(r \Vdash \varphi$ o $r \Vdash \psi)$.
5. Si $p \Vdash \varphi$ y $q \Vdash \neg\phi$, entonces $p \perp q$.
6. $p \Vdash \forall x \in \bar{a}\varphi(x)$ si y sólo si para todo $b \in a$, $p \Vdash \varphi(\bar{b})$.
7. $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots \tau_n) \vee p \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}$ es denso en $\mathbb{P}$.
8. $p \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, ..., \tau_n)$ si y sólo si $\{r \leq p : \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \varphi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)\}$ es denso bajo $p$.
9. Si $p \Vdash \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x, \tau_1, ..., \tau_n)$, entonces $\exists q \leq p \exists \pi \in dom(\sigma)(q \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, ..., \tau_n)$.

# Resultados generales

En los siguientes ejercicios $M$ es un modelo base de ZFE.

1. Sea $\kappa$ un cardinal no numerable. Sea $\mathbb{P} \in M$ una noción de forcing con la $\kappa-$c.c. (toda anticadena tiene cardinalidad menor estricta que $\kappa$). Sean $A, B \in \mathbb{P}$ y $G$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M$. Fijemos una función $f \in M[G]$ con $f : A \to B$. Demuestre que hay una función $F : A \to \mathcal{P}(B)$ con $F \in M$ tal que para todo $a \in A$, $f(a) \in F(a)$ y $(|F(a)| < \kappa)^M$.

   *Sugerencia:* La prueba de un resultado menos general ($\kappa = \aleph_1$) se encuentra en la sección 4.3 del libro *Set theory* de Kenneth Kunen, la prueba de esta generalización no requiere ideas adicionales. Ponga cuidado en especificar los momentos en los que use el lema de verdad y el lema de definibilidad.

2. Sea $\mathbb{B} \in M$ una álgebra booleana completa, $G$ un filtro $\mathbb{B}$-genérico en $M$ y $A \in M$.
   - Demuestre que para toda función $f : A \to \mathbb{B}$ con $f \in M$ se cumple que $f^{-1}(G) \in M[G]$ y $f^{-1}(G) \subset A$.

- Demuestre que si $B \in M[G]$ y $B \subset A$, entonces existe una función $f \in M$ tal que $f : A \to \mathbb{B}$ y que en $M[G]$ se cumple que $f^{-1}(G) = B$.

Concluya que si $\lambda$ es un cardinal en $M$, entonces $(2^{\lambda})^{M[G]} \leq (|\mathbb{B}|^{\lambda})^{M}$.

*Sugerencia:* Para la segunda parte, dado $b \in B$ utilice el hecho de que $\mathbb{B}$ es una álgebra booleana completa para definir $p_b = \sup\{p \in \mathbb{B} | p \Vdash \text{“}\dot{b} \in \dot{B}\text{”}\}$, después aplica el lema de verdad.

3. Sea $\kappa$ un cardinal regular tal que $2^{<\kappa} = \kappa$. Sea $S$ un conjunto arbitrario y sea $|C| \leq \kappa$. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de funciones parciales de $S$ a $C$ cuyo dominio tiene tamaño menor a $\kappa$. Dados $p, q \in \mathbb{P}$ diremos que $p < q$ si $q \subset p$. Demuestre que $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa^{+}-$c.c.

   *Sugerencia:* Sea $W$ una anticadena maximal, para demostrar que $|W| \leq \kappa$, construya recursivamente dos sucesiones de conjuntos $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_\alpha \cdots \subset S$ y $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_\alpha \subset \cdots \subset W$ en donde los términos estén definidos para todo $\alpha < \kappa$. Si $\alpha$ es un ordinal límite, defina $A_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ y $W_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} W_\beta$. Luego, dados $A_\alpha$ y $W_\alpha$, por cada $p \in \mathbb{P}$ que cumpla que $dom(p) \subset A_\alpha$ escoja una $q \in W$ (si es que hay una) de forma que $p = q \restriction_{A_\alpha}$, defina $W_{\alpha+1}$ como $W_\alpha$ unido con el conjunto de $q$'s escogidas y $A_{\alpha+1} = \bigcup\{dom(q) : q \in W_{\alpha+1}\}$. Pruebe que $W = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} W_\alpha$ y observe “qué tanto aumentan”los $W_\alpha$ y los $A_\alpha$ en cada paso.

## Dos nociones de forcing

1. Sea $\kappa$ un cardinal regular tal que $2^{<\kappa} = \kappa$. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las funciones parciales de $\lambda \times \kappa$ a $\{0, 1\}$ cuyo dominio tiene tamaño menor a $\kappa$. Dados $p, q \in \mathbb{P}$ diremos que $p < q$ si $q \subset p$. Sea $G$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M$ y sea $\lambda$ un cardinal tal que $\lambda^{\kappa} = \lambda$. Demuestre que en la extensión genérica se cumple que $2^{\kappa} = \lambda$.

   *Sugerencia:* Puede utilizar los tres resultados anteriores. Recuerde la manera en que se utilizaba el caso particular del resultado del primer inciso de la sección anterior para el forcing de Cohen clásico y ponga cuidado en especificar el momento en que utilice que $\kappa$ es regular.

2. Sea $\lambda$ un cardinal no numerable, sea $\mathbb{P}$ el conjunto de sucesiones finitas de ordinales menores que $\lambda$. Dados $p, q \in \mathbb{P}$ diremos que $p < q$ si $q \subset p$.

   - Demuestra que $(|\lambda|)^{M[G]} = \aleph_0$.
   - Demuestra que los cardinales mayores que $\lambda$ se preservan bajo la extensión genérica.

   *Sugerencia:* Para la primera parte observa que si $G$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico entonces $\cup G$ puede ser pensado como una función de $\omega$ a $\lambda$, luego define una familia de densos de $\mathbb{P}$ adecuada. Para la segunda parte prueba que $\mathbb{P}$ tiene la $\lambda^{+}-$c.c. y luego aplica el inciso uno de la sección anterior de la misma forma que lo aplicaste en el inciso anterior de esta sección.