Ejercicios para el examen III de Álgebra Superior I
Semestre 2020-I
12 de septiembre de 2019

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudtes: Manuel Zúñiga y Mariana Garduño

El examen III será el — de octubre, pueden entregar opcionalmente un subconjunto (propio o impropio) de los incisos pares de los ejercicios que tengan hasta 4 incisos y los incisos que sean múltiplos de 3 de los ejercicios que tengan más de 4 incisos para el — de octubre.

Producto cartesiano

1. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3, 4\}$. Encuentre $A \times B$, $A \times C$, $A \times (B \cup C)$ y $A \times B \times C$.

2. Si $(x + y, 1) = (3, x - y)$, encuentre x y y.

3. Sean $A = \{(0, 0), (0, 1)\}$ y $B = \{a, b\}$.
   Determine los siguientes conjuntos:
   (i) A^2
   (ii) $\mathcal{P}(A^2)$
   (iii) B^2
   (iv) $\mathcal{P}(B^2)$.

4. Considere los conjuntos:
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \leq x \leq 3 \ \wedge\ -1 \leq y < 5\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -2 \leq x < \frac{5}{2} \ \wedge\ 3 \leq y \leq 7\right\}.$$
   Describa en el plano cartesiano los conjuntos A, B y $A \cap B$.

5. Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera. Demuestre lo siguiente:
   (i) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
   (ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
   (iii) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
   (iv) $[(C \setminus A) \times D] \cup [C \times (D \setminus B)] = (C \times D) \setminus (A \times B)$;
   (v) $A \times B = \emptyset$ si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

6. (i) Para cualesquiera conjuntos A, B, C y D tales que $A \neq \emptyset$ y $C \neq \emptyset$, demuestre que
$$A \subseteq B \text{ y } C \subseteq D \text{ si y sólo si } A \times C \subseteq B \times D.$$
   (ii) ¿Qué sucede si en el inciso anterior no se pide que $A \neq \emptyset$ o $C \neq \emptyset$?

Relaciones

7. Demuestre que $R^{-1} \subseteq im(R) \times dom(R)$.

8. (i) Encuentre un ejemplo de una relación R tal que $R^{-1} = im(R) \times dom(R)$.
   (ii) Encuentre un ejemplo de una relación R tal que $R^{-1} \neq im(R) \times dom(R)$.

9. (i) Encuentre ejemplos de relaciones R y S tales que $S \circ R \neq R \circ S$.
   (ii) ¿Se pueden encontrar relaciones R y S tales que $R \neq S$ y $S \circ R = R \circ S$?

10. Sean T, S y R relaciones binarias cualesquiera. Pruebe que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

11. Considérense los siguientes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad D = \{2, 3, 8, 10\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
$C = \{1, 4, 6, 16\}$ $\quad E = \{1, 2, 4, 6, 8\}$

Defínanse las siguientes relaciones:

$R \subseteq A \times B$ tal que $(x, y) \in R$ si y sólo si $x + y \leq 5$;

$S \subseteq A \times C$ tal que $(x, y) \in S$ si y sólo si $y = x^2$;

$T \subseteq C \times D$ tal que $(x, y) \in T$ si y sólo si $y = x/2$;

$P \subseteq E^2$ tal que $(x, y) \in P$ si y sólo si 3 divide a $x + y$.

   (i) Determine a las relaciones R, S, T y P, nombrando todos sus elementos.
   (ii) Represente gráficamente a $A \times B$, R, $A \times C$, S, $C \times D$, T, E^2 y P como se hizo en el ejemplo 3.1.15.
   (iii) Determine los dominios e imágenes de las cuatro relaciones.
   (iv) Determine R^{-1} y P^{-1}, nombrando todos sus elementos.
   (v) Determine la composición $T \circ S$ y represéntela gráficamente.
   (vi) Determine $R^{-1} \circ P^{-1}$, nombrando todos sus elementos.

Tipos de relaciones

12. Recuerde los conjuntos y relaciones del ejercicio 11.

    (i) Clasifique a las relaciones R, S y T en términos de si son simétricas, antisimétricas y/o transitivas, justificando sus respuestas.

    (ii) Clasifique a P en términos de si es reflexiva sobre E, antirreflexiva sobre E, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, justificando sus respuestas.

13. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En cada inciso determine si la relación R es reflexiva sobre A, antirreflexiva sobre A, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, justificando sus respuestas.

    (i) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$.

    (ii) $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

    (iii) $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

    (iv) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

    (v) $R = \{(1, 3), (4, 2), (2, 4), (3, 1), (2, 2)\}$.

14. En cada inciso determine si la relación R definida sobre el conjunto A es reflexiva sobre A, antirreflexiva sobre A, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, justificando su respuesta.

    (i) $A = \mathbb{N}$, y $a\ R\ b$ si y sólo si $a + b$ es par.

    (ii) $A = \mathbb{Z}$, $(a, b) \in R$ si y sólo si $a \leq b + 3$.

    (iii) $A = \mathbb{Z}$, $a\ R\ b$ si y sólo si $|a - b| \leq 2$.

    (iv) $A = \mathbb{Z}$, $a\ R\ b$ si y sólo si $|a - b| = 2$.

    (v) $A = \mathbb{Z}$, y $(a, b) \in R$ si y sólo si $a^2 + a = b^2 + b$.

    (vi) $A = \mathbb{R}$, y $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{R}^+\}$, donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los reales positivos.

    (vii) $A = \mathbb{R}$, y $x\ R\ y$ si y sólo si $|x + y| = 2$.

    (viii) A es el conjunto de las rectas en el plano, y $R = \{(a, b) \in A^2 : a \cap b \neq \emptyset\}$.

    (ix) A es el conjunto de las rectas en el plano, y $(a, b) \in R$ si y sólo si a es perpendicular a b.

15. Represente las relaciones de los incisos (vi) y (vii) del ejercicio anterior gráficamente y diga cuál es su dominio y su imagen.

16. Definimos las siguientes relaciones R y S definidas sobre $\mathbb{Z}^2$; es decir, $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ y $S \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$; como sigue:

    (i) $(a, b)\ S\ (a', b')$ si y sólo si $ab' = ba'$.

    (ii) $(a, b)\ R\ (c, d)$ si y sólo si $a = c$.

    Determine si son reflexivas sobre $\mathbb{Z}^2$, antirreflexivas sobre $\mathbb{Z}^2$, simétricas, antisimétricas y/o transitivas, justificando sus respuestas.

17. Sean R y S relaciones sobre un conjunto cualquiera A. Demuestre lo siguiente:

    (i) Si R y S son reflexivas sobre A, entonces la relación $R \cup S$ es reflexiva sobre A.

    (ii) R y S son reflexivas sobre A si y sólo si la relación $R \cap S$ es reflexiva sobre A.

    (iii) $R \cup R^{-1}$ es una relación simétrica.

    (iv) R es simétrica si y sólo si R^{-1} es simétrica.

    (v) R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

    (vi) R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.

    (vii) R es transitiva si y sólo si R^{-1} es transitiva.

    (viii) Si R y S son transitivas, entonces la relación $R \cap S$ es transitiva.

    (ix) Si R y S son antisimétricas, entonces la relación $R \cap S$ es antisimétrica.

    (x) Si $dom(R) \cap im(R) = \emptyset$, entonces R es antisimétrica.

    (xi) $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_{dom(R)}$ si y sólo si R es antisimétrica.

18. Sean R y S relaciones sobre un conjunto cualquiera A. Las siguientes afirmaciones *no* siempre son ciertas. Encuentre contraejemplos, justficándolos.

    (i) Si $R \cup S$ es reflexiva sobre A, entonces R y S son reflexivas sobre A.

    (ii) R es transitiva si y sólo si $R \subseteq R \circ R$.

    (iii) Si R y S son transitivas, entonces la relación $R \cup S$ es transitiva.

    (iv) Si R y S son antisimétricas, entonces la relación $R \cup S$ es antisimétrica.

    (v) Si $R \cap S$ es transitiva, entonces R y S son transitivas.

    (vi) Si $R \cap S$ es antisimétrica, entonces R y S son antisimétricas.

19. Sea R una relación simétrica y transitiva. Sea $(x, y) \in R$, por ser R simétrica $(y, x) \in R$. Tenemos entonces $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ y por transitividad concluimos que $(x, x) \in R$. ¿Podemos entonces decir que la simetría y la transitividad implican la reflexividad?

20. Si es posible, en cada inciso dé un ejemplo de una relación R definida sobre un conjunto A de forma que cumpla lo siguiente, y si no es posible, justifique por qué no lo es.

    (i) R sea reflexiva sobre A y simétrica, pero no transitiva.

    (ii) R sea reflexiva sobre A y transitiva, pero no simétrica.

(iii) R sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva sobre A.

(iv) R sea reflexiva sobre A, pero no simétrica ni transitiva.

(v) R sea simétrica, pero no reflexiva sobre A ni transitiva.

(vi) R sea transitiva, pero no reflexiva sobre A ni simétrica.

(vii) R sea reflexiva sobre A y antisimétrica.

(viii) R sea antismiétrica y no sea reflexiva sobre A.

(ix) R sea reflexiva sobre A, antismiétrica y transitiva.

(x) R sea antirreflexiva sobre A y transitiva.

Relaciones de equivalencia

21. En los ejercicios 13, 14 y 16 de la sección anterior se debe haber probado que las siguientes relaciones sobre el conjunto A son reflexivas, simétricas y transitivas. Describa las clases de equivalencia de estas relaciones de equivalencia y la partición de A inducida por dichas relaciones.

    (i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$.

    (ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $R = \{(1, 1),(2, 2),(3, 3)\}$.

    (iii) $A = \mathbb{N}$ y $a\ R\ b$ si y sólo si $a + b$ es par.

    (iv) $A = \mathbb{Z}$ y $(a, b) \in R$ si y sólo si $a^2 + a = b^2 + b$.

    (v) $A = \mathbb{Z}^2$ y $(a, b)\ R\ (c, d)$ si y sólo si $a = c$.

22. Demuestre que las siguientes relaciones son de equivalencia, determine las clases de equivalencia y dé la partición inducida por ellas. (Opcionalmente, vea si es posible encontrar un conjunto de índices I de forma que ningún índice indexe a la misma clase de equivalencia que un índice distinto de I, tal como fue descrito en el Apartado 3.3.1.)

    (i) La relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como $x \sim y$ si y sólo si $x + y$ es par.

    (ii) La relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como $a \sim b$ si y sólo si $a = b + 5k$.

    (iii) La relación definida sobre $\mathbb{Z}$ como $n \sim m$ si y sólo si 7 divide a $n - m$.

    (iv) La relación definida sobre $A = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ como $S = \{(x, y) \in A^2 : x^2 = y^2\}$.

    (v) La relación definida sobre $B = \{1, 2, 3, 4\}$ como $T = \{(x, y) \in B^2 : x = y \vee x + y = 3\}$.

    (vi) Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos en el plano. Sea R la relación definida sobre $\mathcal{T}$ tal que dos triángulos están relacionados según R si y sólo si son semejantes (sus ángulos correspondientes son iguales).

    (vii) Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las personas. Sea N la relación definida sobre $\mathcal{P}$ tal que dos personas están relacionadas según N si y sólo si tienen el mismo nombre.

    (viii) Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación R definida sobre S^2 (es decir, $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$) como
    $$(a, b)\, R\, (c, d) \text{ si y sólo si } a + d = b + c.$$

    (ix) La relación definida sobre $\mathbb{N}^2$ (es decir, $\sim \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$) como
    $$(a, b) \sim (a', b') \text{ si y sólo si } a + b' = b + a'.$$

    (x) La relación definida sobre $\mathbb{R}^2$ (es decir, $\sim \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) como
    $$(x, y) \sim (x', y') \text{ si y sólo si } y = y'.$$

    (xi) La relación definida sobre $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ (es decir, $\sim \subseteq (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$) como
    $$(a, b) \sim (a', b') \text{ si y sólo si } ab' = ba'.$$

23. Demuestre que la siguiente relación $\sim$ definida sobre $\mathbb{R}$ es una relación de equivalencia y describa cuál es la clase del 0, del $\frac{1}{2}$, del -1 y de π.
$$x \sim y \text{ si y sólo si } x^2 - x = y^2 - y.$$

24. Retomando lo planteado en los ejercicios 17 y 18, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando a detalle su respuesta.

    (i) Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cup S$ es una relación de equivalencia sobre A.

    (ii) Si R y S son relaciones de equivalencia definidas sobre un conjunto no vacío A, entonces $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A.

    (iii) Si R y S son relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A tales que $R \cup S$ es relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R como S son relaciones de equivalencia sobre A.

    (iv) Si R y S son relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A tales que $R \cap S$ es relación de equivalencia sobre A, entonces tanto R como S son relaciones de equivalencia sobre A.

25. Sea A un conjunto no vacío cualquiera. Caracterice a la relación igualdad sobre A de la siguiente manera.

    (i) Sea R una relación de equivalencia sobre A. Demuestre que $R = \Delta_A$ si y sólo si para toda $a \in A$, $[a] = \{a\}$.

(ii) Sea R una relación de equivalencia sobre A. Demuestre que $R = \Delta_A$ si y sólo si $\forall a, b \in A(a \neq b \Leftrightarrow [a] \neq [b])$.

26. Diga si las siguientes son particiones de los conjuntos dados y si sí lo son, diga cuáles son las relaciones de equivalencia inducidas, justificando bien sus respuestas:

    (i) Dado el conjunto $\mathbb{Z}$, sea
    $$P = \big\{\{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m)\},\\ \{n \in \mathbb{Z} : n\exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m+1)\},\\ \{n \in \mathbb{Z} : n\exists m \in \mathbb{Z}(n = 3m+2)\}\big\}.$$

    (ii) Dado el conjunto $\mathbb{Z}$, sea
    $$P = \big\{\{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\},\\ \{n \in \mathbb{Z} : n > 1\}\big\}.$$

    (iii) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea
    $$P = \big\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{6\}\big\}.$$

    (iv) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sea
    $$P = \big\{\{1, 2\}, \{5\}, \{3, 4, 6\}\big\}.$$

    (v) Dado el conjunto $\mathbb{R}$, sea
    $$P = \big\{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\},\\ \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\},\\ \{x \in \mathbb{R} : x > 0\},\\ \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional} \wedge x \text{ es racional}\}\big\}.$$

    (vi) Dado el conjunto $\mathbb{R}$, sea
    $$P = \big\{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es irracional}\},\\ \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \text{ es racional}\},\\ \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\big\}.$$

27. Sea A un conjunto no vacío y sea $\{P_i\}_{i \in I}$ una partición de A. Sea R la relación definida en A por: aRb si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a \in P_i$ y $b \in P_i$. Demuestre que R es una relación de equivalencia en A.

28. Sea A un conjunto no vacío y sea $\sim$ una relación de equivalencia en A. Demuestre que $A/\sim$ es una partición de A.

29. Sea A un conjunto no vacío. Sean $\sim$ y $\sim'$ relaciones de equivalencia definidas sobre A tales que inducen la misma partición en A, es decir que $A/\sim$ y $A/\sim'$ son la misma partición. Pruebe que $\sim' = \sim$.

30. Sean $P = \{A_u : u \in I\}$ y $P' = \{A'_v : v \in J\}$ particiones sobre A tales que las relaciones de equivalencia que inducen son iguales. Demuestre que $P' = P$.

31. Encuentre todas las posibles particiones del conjunto $\{a, b, c, d\}$, donde a, b, c y d son todos distintos entre sí y para cada una de ellas dé la relación de equivalencia asociada.