Tarea III de Teoría de Conjuntos I
Semestre 2018-II
18 de marzo de 2018

Profra: Gabriela Campero Arena — Ayudte: Manuel Zúñiga

1. Sea A un conjunto. Demuestre la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
   (a) A es transitivo;
   (b) $\forall y(y \in A \Rightarrow y \subseteq A)$;
   (c) $\bigcup A \subseteq A$;
   (d) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$;
   (e) $\mathcal{P}(A)$ es transitivo;
   (f) $\bigcup \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$;
   (g) $\forall x \forall y((x \in y \wedge y \subseteq A) \Rightarrow x \subseteq A)$;
   (h) $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
2. Diga si los siguientes conjuntos son transitivos, si la relación $\in$ es transitiva en ellos y si la relación $\in$ es tricotómica, justificando su respuesta.
   (i) $\{\varnothing\}$ (ii) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
   (iii) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ (iv) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$
   (v) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (vi) $\varnothing$
3. (i) Demuestre que si A es transitivo, entonces $\bigcup A$ es transitivo.
   (ii) Dé un ejemplo en el que $\bigcup A$ sea transitivo, pero A no lo sea.
4. Sean X y Y conjuntos cualesquiera. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo:
   (i) si X es transitivo, $\in$ es transitiva en X;
   (ii) si $\in$ es transitiva en X, entonces X es transitivo;
   (iii) X es transitivo si y sólo si $X \subseteq \mathcal{P}(X)$;
   (iv) X es transitivo si y sólo si $\bigcup X = X$;
   (v) X es transitivo si y sólo si $\bigcup X \subseteq X$;
   (vi) si X es inductivo, entonces $X \subseteq \bigcup X$;
   (vii) si $X \subseteq \bigcup X$, entonces X es inductivo;
   (viii) si X es transitivo e inductivo, entonces $X = \bigcup X$;
   (ix) si X es transitivo y $\in$ es transitiva en X, entonces todo $x \in X$ es transitivo;
   (x) $X \subseteq \bigcup(s(X))$;
   (xi) $\bigcup(s(X)) \subseteq X$;
   (xii) X es transitivo si y sólo si $\bigcup(s(X)) \subseteq X$;
   (xiii) si X y Y son transitivos, entonces $X \cup Y$ es transitivo;
   (xiv) si X y Y son transitivos, entonces $X \cap Y$ es transitivo;
   (xv) si $X \in Y$ y Y es transitivo, entonces X es transitivo;
   (xvi) si X es transitivo, entonces $\bigcup X$ es transitivo;
   (xvii) si $\bigcup X$ es transitivo, entonces X es transitivo;
   (xviii) si X es no vacío y $\bigcap X$ es transitivo, entonces X es transitivo;
   (xix) si X es no vacío y transitivo, y todo elemento de X es transitivo, entonces $\bigcap X$ es transitivo;
   (xx) si $X \subseteq Y$ y Y es transitivo, entonces X es transitivo;
   (xxi) si Y es transitivo y $S \subseteq \mathcal{P}(Y)$, entonces $Y \cup \bigcup S$ es transitivo;
   (xxii) $s(X) \neq \varnothing$;
   (xxiii) $X \subseteq s(X)$;
   (xxiv) no existe un conjunto Z tal que $X \subsetneq Z \subsetneq s(X)$.
5. Diga si los siguientes conjuntos son números naturales, justificando su respuesta:
   (i) $\varnothing$, (ii) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
   (iii) $\{\varnothing\}$, (iv) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$,
   (v) $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\})$, (vi) $\{0, 1, 2, ..., n, n \cup \{n\}, ...\}$.
6. Sean n y m números naturales. Demuestre lo siguiente:
   (i) $n \notin n$;
   (ii) $\forall x \in n(x$ es un número natural$)$;
   (iii) $m \notin n$ o $n \notin m$;
   (iv) $s(n)$ es un número natural;
   (v) si $s(n) = s(m)$, entonces $n = m$ (es decir, en los naturales s es una función inyectiva);
   (vi) si $n \neq 0$, entonces existe un número natural k tal que $s(k) = n$;
   (vii) si $n \neq 0$ y $n \neq 1$, entonces existe un número natural k tal que $s(s(k)) = n$;

(viii) no existe un número natural k tal que $n \in k \in s(n)$;
(ix) si $n \in m$, entonces $s(n) \in m$ o $s(n) = m$;
(x) $n \in m$ si y sólo si $s(n) \in s(m)$;
(xi) $n \in m$ si y sólo si $n \subsetneqq m$.

7. Demuestre que 'sucesor' restringida al *conjunto* de los números naturales ω es una función y es inyectiva.
8. Sea A un conjunto no vacío de números naturales (A no es necesariamente un número natural). Demuestre que si existe un natural n tal que $\forall a \in A(a \in n)$, entonces $\exists m \in A$ tal que $\forall a \in A(a \in m)$. Es decir, si A está acotado superiormente según $\in$ por un número natural, entonces tiene un $\in$-máximo.
9. Sea A un conjunto y r una relación binaria sobre A. Demuestre que si $\langle A, r\rangle$ es buen orden, entonces no existe $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq A$ tal que $\forall n \in \omega(\langle a_{s(n)}, a_n\rangle \in r)$ (es decir, no existe una sucesión infinita r-decreciente de elementos en A). El regreso de esta afirmación es cierto, pero para demostrarlo necesitaremos el Axioma de Elección.
10. Demuestre que no existe una función $f : \omega \to \omega$ tal que $\forall n \in \omega(f(s(n)) \in f(n))$.
11. Sea A un conjunto, $a \in A$ y $f : A \to A$. Demuestre que si $a \notin rang(f)$ y f es inyectiva, entonces existe una función inyectiva $h : \omega \to A$.
12. Sea $\langle A, r\rangle$ un orden total. Demuestre que si $f : \omega \to A$ es tal que $\forall n \in \omega\langle f(n), f(s(n))\rangle \in r$, entonces $\forall n, m \in \omega(m \in n \Rightarrow \langle f(m), f(n)\rangle \in r)$.
13. Sea A un conjunto y sea $B \subsetneqq A$. Demuestre que si existe una función inyectiva $f : A \to B$, entonces hay un subconjunto de A que es biyectable con ω. *Sugerencia:* Use alguno de los ejercicios anteriores.
14. Demuestre que existe una única función $+ : \omega \times \omega \to \omega$ tal que $+(n, 0) = n$ y $+(n, s(m)) = s(+(n, m))$.
Notación: Como es costumbre, denotamos con $n + m$ a $+(n, m)$.
15. (i) Demuestre que existe una única función $g : \omega \to \omega$ tal que $g(0) = 2$ y $g(s(n)) = 3 + g(n)$.
(ii) Calcule $g(4)$.
(iii) Dé una definición explícita no recursiva de la función g del inciso anterior, es decir, la definición que dé debe ser de la forma: $g(m) = n \leftrightarrow ...$ o bien $g = \{< m, n >: ...\}$ y en '...' no debe aparecer g.
16. Demuestre que existe una única función $\cdot : \omega \times \omega \to \omega$ tal que $\cdot(n, 0) = 0$ y $\cdot(n, s(m)) = n + \cdot(n, m)$.
Notación: Como es costumbre, denotamos con $n \cdot m$ a $\cdot(n, m)$.
17. (i) Demuestre que existe una única función $g : \omega \to \omega$ tal que $g(0) = 1$ y $g(s(n)) = 2 \cdot g(n)$.
(ii) Dé una definición explícita no recursiva de la función g del inciso anterior, es decir, la definición que dé debe ser de la forma: $g(m) = n \leftrightarrow ...$ o bien $g = \{< m, n >: ...\}$ y en '...' no debe aparecer g.
18. Demuestre las siguientes afirmaciones al respecto de la operación $+ : \omega \times \omega$ definida en el ejercicio 14.
(i) $\forall n \in \omega(s(n) = n + 1)$.
(ii) $\forall n \in \omega(0 + n = n)$ y entonces 0 es 'el neutro para +'.
(iii) $\forall n, m \in \omega(n + m = m + n)$, es decir, '+ es conmutativa'.
(iv) $\forall n, m, p \in \omega(n + (m + p) = (n + m) + p)$, es decir, '+ es asociativa'.
(v) $\forall n, m, p \in \omega(n + p = m + p \Rightarrow n = m)$, es decir, se cumple 'la ley de la cancelación de la +'.
(vi) $\forall n, m \in \omega(n \neq 0 \Rightarrow n + m \neq 0)$.
(vii) $\forall n, m \in \omega(n + m = 0 \leftrightarrow (n = 0 \wedge m = 0))$.
(viii) $\forall n, m, k \in \omega(m \in n \leftrightarrow m + k \in n + k)$, es decir,
$\forall n, m, k \in \omega(m < n \leftrightarrow m + k < n + k)$.
(ix) $\forall n, m \in \omega(m \leq n \leftrightarrow \exists k \in \omega\ m + k = n)$, donde $m \leq n$ se define como
$m \leq n \leftrightarrow (m < n \vee m = n) \leftrightarrow (m \in n \vee m = n) \leftrightarrow m \subseteq n$.
(x) Para cualesquiera $n, m \in \omega$ si $n \leq m$ el natural k tal que $m + k = n$ que afirma el inciso anterior que existe es único.
(xi) Para cualesquiera $n, m \in \omega$ si $n < m$ el natural k tal que $m + k = n$ que afirma el inciso anterior que existe es distinto de 0.
19. Demuestre las siguientes afirmaciones al respecto de la operación $\cdot : \omega \times \omega$ definida en el ejercicio 16.
(i) $\forall n \in \omega(n \cdot 1 = n)$ y $\forall n \in \omega(1 \cdot n = n)$, entonces 1 es 'el neutro para $\cdot$'.
(ii) $\forall n, m, p \in \omega((n + m) \cdot p = (n \cdot p) + (m \cdot p))$, es decir, '$\cdot$ se distribuye sobre +'.
(iii) $\forall n, m \in \omega(n \cdot m = m \cdot n)$, es decir, '$\cdot$ es conmutativa'.
(iv) $\forall n, m, p \in \omega(n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p)$, es decir, '$\cdot$ es asociativa'.
(v) $\forall n, m, p \in \omega((p \neq 0 \wedge n \cdot p = m \cdot p) \Rightarrow n = m)$, es decir, se cumple 'la ley de la cancelación de los no ceros en $\cdot$'.
(vi) $\forall n, m \in \omega(n \cdot m = 0 \leftrightarrow (n = 0 \vee m = 0))$.
(vii) $\forall n, m, k \in \omega((k \neq 0 \wedge m \in n) \leftrightarrow m \cdot k \in n \cdot k)$, es decir,
$\forall n, m, k \in \omega((k \neq 0 \wedge m < n) \leftrightarrow m \cdot k < n \cdot k)$.
20. Defina una función $f : \omega \times \omega \to \omega$ de manera que refleje la operación exponenciación y demuestre 'las leyes de los exponentes'.
21. Demuestre las variantes del Teorema de Recursión y encuentre aplicaciones de ellas.
22. Enuncie las caracterizaciones que se hicieron en clase sobre las estructuras $\langle \omega, s, \varnothing\rangle$ y $\langle \omega, \in\rangle$ y reconstruya sus demostraciones.