Tarea II del Seminario de Álgebra A

Semestre 2015-II

17 de marzo de 2015

Profra: Gabriela Campero Arena

Ayudtes: Manuel Alejandro Zúñiga y Jorge Garza

Órdenes parciales

1. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial y G un filtro en $\mathbb{P}$.
   - Demuestra que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces es un ultrafiltro en $\mathbb{P}$.
   - Demuestra que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico y $\mathbb{P}$ es una álgebra booleana, entonces para todo $p \in \mathbb{P}$ se cumple que $p \in G$ o $p^* \in G$.
   - Demuestra que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico si y sólo si para cada cadena maximal $\mathcal{C}$ en $\mathbb{P}$ se cumple que $|\mathcal{C} \cap G| = 1$.
   - Demuestra que G es $\mathbb{P}$-genérico si y sólo si para todo $E \in M$ con la propiedad de que $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in E (p \perp q)$ se tiene que $E \cap G \neq \varnothing$.

2. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial numerable sin átomos. Demuestra que hay 2^ω filtros $\mathbb{P}$-genéricos.

3. Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Para cada $p \in \mathbb{P}$ definimos $U_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Sea τ la topología en $\mathbb{P}$ que tiene como subbase a la familia $\{U_p : p \in \mathbb{P}\}$.
   - Demuestra que si $D \subset \mathbb{P}$ es un conjunto denso en el sentido de órdenes, entonces es denso en el sentido topológico.
   - Demuestra que $\mathbb{P}$ es κ-distributivo si y sólo si cada familia $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$, con $\lambda < \kappa$, de anticadenas maximales tiene en $\mathbb{P}$ tiene un refinamiento común, es decir existe una anticadena maximal $A \subset \mathbb{P}$ tal que para cada $p \in A$ y cada $\alpha < \lambda$ existe $q \in A_\alpha$ tal que $p \leq q$.

4. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ órdenes parciales y sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje denso. Demuestra que si $A \subset \mathbb{P}$ es una anticadena maximal entonces $e(A) \subset \mathbb{Q}$ es una anticadena maximal.
   ¿Será cierto que si un encaje preserva anticadenas maximales entonces es un encaje denso?

   Nota: Recuerda que e es un encaje si para todo $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$ implica $e(p) \leq q$ y $p \perp q$ implica $e(p) \perp e(q)$. Decimos que e es encaje denso si e es encaje y $e(\mathbb{P})$ es denso en $\mathbb{Q}$. Decimos que e es un encaje completo si preserva cadenas maximales.

5. Sea M un modelo transitivo de ZFC. Sea $\mathbb{P} = 2^{<\omega}$ el conjunto de sucesiones finitas de 0's y 1's de modo que dados $p, q \in \mathbb{P}$, entonces $p > q$ si y sólo si q extiende a p. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico en M, demuestra que $f = \cup G$ es una función de ω al $\{0, 1\}$. Por lo anterior f es la función característica de un conjunto $A \subset \omega$, demuestra que $A \notin M$.

   Nota: Observa que este forcing agrega un real “nuevo.ªl momento de hacer la extensión genérica.

P-nombres y extensiones genéricas

En los siguientes ejercicios M es un modelo transitivo numerable de ZFC.

1. Sea $\mathbb{P} \in M$ un forcing y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico en M.
   Define un orden R en $M^{\mathbb{P}}$ que cumpla las siguientes dos condiciones.

   - R es bien fundado y limitado por la izquierda.
   - Para todo $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ se cumple que $mos_{M^{\mathbb{P}},R}(\sigma) = val_G(\sigma)$.

   Demuestra que $val_G : (M^{\mathbb{P}}, R) \to (M[G], \in)$ es un morfismo de órdenes (i.e. para todo $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ se tiene que $\sigma R \tau$ si y sólo si $val(\sigma) \in val(\tau)$. ¿Será posible que val sea un isomorfismo?

   Nota: La función $mos_{M^{\mathbb{P}},R}$ es el colapso de Mostowski para $M^{\mathbb{P}}$ con el orden R.

2. Encuentra un forcing $\mathbb{P} \in M$ y un enunciado ψ en el lenguaje de la teoría de conjuntos con los elementos de $M^{\mathbb{P}}$ como constantes, de manera que haya dos filtros genéricos diferentes G y H cumpliendo que $M[G] = M[H]$ y que $M[G] \vDash \psi$ pero $M[H] \nvDash \psi$.

3. Suponga que $\mathbb{P} \in M$ y que $\mathbb{P}$ es infinito. Pruebe que existe $H \subseteq \mathbb{P}$ tal que $M[H]$ no es un modelo de $ZF - \mathcal{P}$.
   Sugerencia: Tome una función inyectiva $f \in M$ de ω^2 en $\mathbb{P}$ y elija H de tal forma que $f^{-1}(H)$ es un buen orden para ω cuyo tipo de orden es mayor a $o(M)$.

4. Supongamos que $\mathbb{P} \in M$ no tiene átomos. Las extensiones M_n están definidas como $M_0 = M$ y $M_{n+1} = M_n[G_n]$, donde G_n es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M_n.

   - Demuestra que $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$.
   - Muestra que $\cup M_n$ no satisface el axioma de unión.

5. Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje con $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$. Pruebe que e es completo si y sólo si para cualquier filtro H $\mathbb{Q}$-genérico sobre M se tiene que $e^{-1}(H)$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $M[e^{-1}(H)] \subset M[H]$.