Tarea II de Álgebra Superior II

Semestre 2020-II

25 de febrero de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena Ayudtes: Carlos Ochoa y Mariana Garduño

Nota importante: La mitad de los ejercicios están resueltos en las notas.

1. (i) Demuestre que la relación $\sim$ definida sobre $\mathbb{N}^2$ es de equivalencia.
   (ii) Describa las clases de equivalencia inducidas por esta relación y diga cómo se define a los enteros.
2. (i) Demuestre que para cualquier entero $[(n,m)]$, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones: existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k,0) \in [(n,m)]$, o existe un único $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $(0,k) \in [(n,m)]$.
   (ii) Utilice el inciso anterior para ver que $\mathbb{Z} = \{[(k,0)] : k \in \mathbb{N}\} \cup \{[(0,k)] : k \in \mathbb{N}^+\}$ y que, además, $\{[(k,0)] : k \in \mathbb{N}\} \cap \{[(0,k)] : k \in \mathbb{N}^+\} = \varnothing$. Observe que esta es una manera natural de visualizar a los enteros, usando un y sólo un representante de cada clase de equivalencia.
3. Demuestre las siguientes afirmaciones al respecto de la suma en $\mathbb{Z}$:
   (i) la suma está bien definida, es decir, no depende de los representantes que se utilicen de las clases de equivalencia para operarla;
   (ii) la suma en $\mathbb{Z}$ es asociativa;
   (iii) $[(0,0)]$ es neutro aditivo por ambos lados;
   (iv) existe un único neutro aditivo por ambos lados;
   (v) todo entero tiene un inverso aditivo por ambos lados;
   (vi) para cada entero su inverso aditivo es único;
   (vii) la ley de la cancelación de la suma en $\mathbb{Z}$ por ambos lados, es decir, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}(a +_{\mathbb{Z}} c = b +_{\mathbb{Z}} c \Rightarrow a = b)$ y $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}(c +_{\mathbb{Z}} a = c +_{\mathbb{Z}} b \Rightarrow a = b)$;
   (viii) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$, la ecuación $a = b +_{\mathbb{Z}} x$ tiene solución en $\mathbb{Z}$ y ésta es única y la ecuación $a = y +_{\mathbb{Z}} b$ tiene solución en $\mathbb{Z}$ y es única;
   (ix) la suma en $\mathbb{Z}$ es conmutativa.
4. Demuestre las siguientes afirmaciones al respecto de la multiplicación en $\mathbb{Z}$:
   (i) la multiplicación está bien definida, es decir, su resultado no depende de los representantes usados en la operación;
   (ii) la multiplicación en $\mathbb{Z}$ es asociativa;
   (iii) $[(1,0)]$ es neutro multiplicativo por ambos lados;
   (iv) el neutro multiplicativo es único, es decir, existe un único $u \in \mathbb{Z}$ tal que para toda $a \in \mathbb{Z}$, $a \cdot_{\mathbb{Z}} u = a$ y $u \cdot_{\mathbb{Z}} a = a$.
5. Demuestre las siguientes afirmaciones que hablan de cómo interactúan de la suma y la multiplicación en $\mathbb{Z}$:
   (i) el neutro aditivo de $\mathbb{Z}$ es distinto del neutro multiplicativo de $\mathbb{Z}$;
   (ii) la ley distributiva, es decir, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}(a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$, y $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}((b +_{\mathbb{Z}} c) \cdot_{\mathbb{Z}} a = (b \cdot_{\mathbb{Z}} a) +_{\mathbb{Z}} (c \cdot_{\mathbb{Z}} a))$;
   (iii) $\forall a,b \in \mathbb{Z}((a = 0_{\mathbb{Z}} \vee b = 0_{\mathbb{Z}}) \Rightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 0_{\mathbb{Z}})$;
   (iv) $\forall a,b \in \mathbb{Z}((-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b = -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b))$, y $\forall a,b \in \mathbb{Z}(a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = -(a \cdot_{\mathbb{Z}} b)$,
   (v) $\forall a \in \mathbb{Z}(-(-a) = a)$,
   (vi) $\forall a,b \in \mathbb{Z}((-a) \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = a \cdot_{\mathbb{Z}} b)$,
   (vii) $\forall a \in \mathbb{Z}((-1_{\mathbb{Z}}) \cdot_{\mathbb{Z}} a = -a)$,
   (viii) $(-1_{\mathbb{Z}}) \cdot_{\mathbb{Z}} (-1_{\mathbb{Z}}) = 1_{\mathbb{Z}}$,
   (ix) $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}(a \cdot_{\mathbb{Z}} (b - c) = a \cdot_{\mathbb{Z}} b - a \cdot_{\mathbb{Z}} c$, y que $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}(b - c) \cdot_{\mathbb{Z}} a = (b \cdot_{\mathbb{Z}} a) - (c \cdot_{\mathbb{Z}} a))$,
   (x) $\forall a,b \in \mathbb{Z}(-(a +_{\mathbb{Z}} b) = -a - b)$.
6. Demuestre que la multiplicación en $\mathbb{Z}$ es conmutativa.
7. Justifique que la definición de los enteros positivos es buena, es decir, que no depende de los representantes que se tomen para determinarlos. Justifique que la definición de los enteros negativos también es buena.
8. Demuestre lo siguiente:
   (i) para cada $a \in \mathbb{Z}$ sucede una y sólo una de las siguientes opciones: $a \in \mathbb{Z}^+$, $a = 0_{\mathbb{Z}}$, o $-a \in \mathbb{Z}^+$;
   (ii) para cada $a \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$, o $-a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$;
   (iii) el único entero que cumple ambas condiciones del inciso anterior es el neutro aditivo;
   (iv) $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\})$;
   (v) para cualquier $a \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^-$ si y sólo si $-a \in \mathbb{Z}^+$, y $a \in \mathbb{Z}^+$ si y sólo si $-a \in \mathbb{Z}^-$.
   (vi) usando el ejercicio 2, muestre que si $a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k,0) \in a$, que es el representante natural de la clase de equivalencia que define a a. Correspondientemente, demuestre que si $-a \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $(0,k) \in a$, que es el representante natural de la clase de equivalencia que define a a;
   (vii) especificando aún más, muestre que si $a \in \mathbb{Z}^+$, existe un único $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $(k,0) \in a$, que es el mismo representante natural de la clase de equivalencia que define a a del inciso anterior; y muestre que si $-a \in \mathbb{Z}^+$, existe un único $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $(0,k) \in a$, que es el mismo

representante natural de la clase de equivalencia que define a a del inciso anterior; además, si $a = 0_{\mathbb{Z}}$, el único $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k, 0) \in a$ es 0;

(viii) para cualesquiera $a \in \mathbb{Z}$, $a = 0_{\mathbb{Z}}$ si y sólo si $-a = 0_{\mathbb{Z}}$.

9. Demuestre lo siguiente:
   (i) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\,(a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 0_{\mathbb{Z}} \Rightarrow (a = 0_{\mathbb{Z}} \lor b = 0_{\mathbb{Z}}))$, concluya que los enteros con su suma y multiplicación forman un dominio entero;
   (ii) la ley de la cancelación de la multiplicación en $\mathbb{Z}$, es decir, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}((c \neq 0_{\mathbb{Z}} \land a \cdot_{\mathbb{Z}} c = b \cdot_{\mathbb{Z}} c) \Rightarrow a = b)$;
   (iii) la suma y la multiplicación son cerradas en los enteros positivos;
   (iv) ¿qué se puede decir sobre los enteros negativos al respecto de la cerradura de las operaciones? justifique su respuesta.
10. Demuestre que
    (i) $\forall [(n, m)], \big[(p, q)\big] \in \mathbb{Z}\ ([(n, m)] >_{\mathbb{Z}} \big[(p, q)\big] \Leftrightarrow n + q > m + p)$;
    (ii) para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Z}$, $a >_{\mathbb{Z}} b$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $b +_{\mathbb{Z}} t = a$.
11. Demuestre que $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ es un orden lineal.
12. Demuestre las siguientes afirmaciones al respecto del orden y las operaciones en $\mathbb{Z}$:
    (i) $\forall a, b, c((c \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\} \land a <_{\mathbb{Z}} b) \Rightarrow a <_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} c)$;
    (ii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}\,(a <_{\mathbb{Z}} b \Leftrightarrow a +_{\mathbb{Z}} c <_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} c)$;
    (iii) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \forall c \in \mathbb{Z}^+\ (a <_{\mathbb{Z}} b \Leftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} c <_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c)$;
    (iv) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \forall c \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{Z}^+\ (a <_{\mathbb{Z}} b \Rightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} c \geq_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c)$;
    (v) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\ \forall c \in \mathbb{Z}^-\ (a \cdot_{\mathbb{Z}} c >_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c \Leftrightarrow a <_{\mathbb{Z}} b)$.
13. Demuestre lo siguiente:
    (i) $\forall a \in \mathbb{Z}(|a| \geq_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}})$.
    (ii) $\forall a \in \mathbb{Z}(\mid a \mid = \mid -a \mid)$.
    (iii) $\forall a, b \in \mathbb{Z}(\mid a \cdot_{\mathbb{Z}} b \mid = \mid a \mid \cdot_{\mathbb{Z}} \mid b \mid)$.
    (iv) $\forall a, b \in \mathbb{Z}(\mid a +_{\mathbb{Z}} b \mid \leq \mid a \mid +_{\mathbb{Z}} \mid b \mid)$.
    (v) $\forall a, b \in \mathbb{Z}(\mid\mid a \mid - \mid b \mid\mid \leq \mid a - b \mid)$.
14. Demuestre lo siguiente:
    (i) $\forall z \in \mathbb{Z}^+(z = 1_{\mathbb{Z}} \lor z >_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}})$;
    (ii) $\forall z, y \in \mathbb{Z}^+\big((z \cdot_{\mathbb{Z}} y \in \mathbb{Z}^+ \land z \in \mathbb{Z}^+) \Rightarrow y \in \mathbb{Z}^+\big)$;
    (iii) si un entero es una unidad, su inverso aditivo también es unidad;
    (iv) los únicos números enteros que tienen inverso multiplicativo son $1_{\mathbb{Z}}$ y $-1_{\mathbb{Z}}$, es decir, $1_{\mathbb{Z}}$ y $-1_{\mathbb{Z}}$ son las únicas unidades de $\mathbb{Z}$.
15. Demuestre que la función $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}$ que da la inmersión de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ es inyectiva y preserva la estructura algebraica, es decir:
    (i) $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}$ es inyectiva;
    (ii) para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}(n + m) = \mathbb{E}_{\mathbb{N}}(n) +_{\mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\mathbb{N}}(m)$;
    (iii) para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}(n \cdot m) = \mathbb{E}_{\mathbb{N}}(n) \cdot_{\mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\mathbb{N}}(m)$;
    (iv) para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ si y sólo si $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}(n) <_{\mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\mathbb{N}}(m)$;
    (v) $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}(0) = \big[(0, 0)\big]$; y
    (vi) $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}(1) = \big[(1, 0)\big]$.
16. Demuestre que en $\mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$ se cumplen los principios de inducción y buen orden como se cumplían para $\mathbb{N}$:
    (i) si $A \subseteq \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$y cumple que $0_{\mathbb{Z}} \in A$, y $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}(z \in A \Rightarrow (z +_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}}) \in A)$, entonces $A = \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$;
    (ii) si $A \subseteq \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$ y cumple que $\forall z \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}((z^< \cap (\mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\})) \subseteq A \Rightarrow z \in A)$, entonces $A = \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$;
    (iii) si $A \subseteq \mathbb{Z}^+ \cup \{0_{\mathbb{Z}}\}$ y $A \neq \varnothing$, entonces $\exists a_0 \in A \forall a \in A(a_0 \leq a)$.

    Sugerencia: Utilice la función $\mathbb{E}_{\mathbb{N}}$ que da la inmersión de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ y el ejercicio anterior.
17. Pruebe que cualquier subconjunto de un conjunto bien ordenado es bien ordenado.
18. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son bien ordenados con el orden en $\mathbb{Z}$ restringido al conjunto, justificando muy bien sus respuestas:
    (i) los enteros pares negativos;
    (ii) los enteros impares positivos;
    (iii) los enteros mayores que -7;
    (iv) los enteros impares menores que 13.
19. * Utilizando lo argumentado en los ejercicios anteriores, diga cuáles subconjuntos de $\mathbb{Z}$ cumplen el principio del buen orden y generalice y demuestre un resultado para ellos como el redactado en el ejercicio 16(iii) de esta sección.
20. * Redacte de manera correcta un principio análogo al del ejercicio 16(ii) para los mismos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ del ejercicio anterior.
21. * Diga para cuáles subconjuntos de $\mathbb{Z}$ se cumple un principio análogo al del ejercicio 16(i), generalícelo para ellos y demuestre que lo cumplen.
22. Justifique que $(\mathbb{N}, +)$ no es un grupo.
23. Revise que el grupo cíclico de orden 2 del ejemplo 1.56 es un grupo.
24. ¿Será que $(\mathbb{Z}, \cdot_{\mathbb{Z}})$ es un grupo? Justifique su respuesta.
25. Demuestre que el grupo cíclico de orden 3 es realmente un grupo: $C_3 = \{a, b, c\}$ con a, b y c todos distintos, y

$\oplus$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b.

26. Sea $G = \{f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ con la operación de composición de funciones. Describa a todos sus elementos, escriba la tabla correspondiente a su operación y verifique que es un grupo, es el grupo simétrico en 3 elementos S_3. En un ejercicio posterior se pide ver que es **no** abeliano, por lo que el orden en la lectura de la tabla que construya es importante.

27. (i) Verifique que el neutro es único en todo grupo.
    (ii) Verifique que en un grupo el inverso de cada elemento es único.
28. Demuestre que la ley de la cancelación de la suma por ambos lados es cierta en cualquier grupo, es decir, si $(G, \oplus)$ es un grupo, entonces para cualesquiera $a, b, c \in G$, $a \oplus c = b \oplus c$ implica que $a = b$, y $c \oplus a = c \oplus b$ implica que $a = b$.
29. Sea $(G, \oplus)$ un grupo. Demuestre que para cualesquiera $a, b \in G$,
    (i) existe un único $c \in G$ tal que $a = b \oplus c$;
    (ii) existe un único $d \in G$ tal que $a = d \oplus b$;
    (iii) si $(G, \oplus)$ es un grupo abeliano, una vez que están fijos los elementos a y b de G, el c y el d, que aseguran los incisos anteriores que existen, son iguales.
30. Verifique que
    (i) el grupo cíclico de orden 3, C_3, del ejercicio 25 es abeliano;
    (ii) cualquier grupo con 1 o con 2 o con 3 elementos es un grupo abeliano;
    (iii) el grupo de simétrico en 3 elementos, S_3, del ejercicio 26 *no* es abeliano.
31. Sea $(G, \oplus)$ un grupo abeliano. Demuestre que si definimos la operación $\odot : G^2 \to G$ como $\forall a, b \in G(a \odot b = 0_G)$, entonces $(G, \oplus, \odot)$ es un anillo.
32. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo. Sean $a, b \in A$. Demuestre que si $a = 0_A$ o $b = 0_A$, entonces $a \odot b = 0_A$.
33. (i) Verifique las estructuras de los ejemplos 1.71, 1.72 y 1.73 de las notas son anillos.
    (ii) Recuerde el grupo cíclico de orden 3 del ejercicio 25 $(C_3, \oplus)$ y agregue la siguiente operación:

$\odot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

    Verifique que $(C_3, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con uno.
    (iii) Verifique que el anillo del ejemplo 1.72 es conmutativo, pero no tiene uno.
    (iv) Verifique que el anillo del ejemplo 1.73 no es conmutativo, pero sí tiene uno y también que tiene matrices distintas del 0_A (la matriz en que todas sus entradas son el 0 de $\mathbb{Z}$) que multiplicadas dan 0_A.
    (v) Para el ejemplo 1.73, encuentre matrices que sean un contrajemplo de la ley de la cancelación para $\odot$, es decir, demuestre que este anillo *no* cumple la ley de la cancelación para $\odot$.
34. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo con uno. Demuestre que el uno es único, es decir, que el neutro multiplicativo es único.
35. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo. Demuestre lo siguiente:
    (i) para cualesquiera $a, b \in A$, $(-a) \odot b = -(a \odot b)$ y
    $a \odot (-b) = -(a \odot b)$;
    (ii) para todo $a \in A$, $(-(-a) = a)$;
    (iii) para cualesquiera $a, b \in A$, $(-a) \odot (-b) = a \odot b$.
36. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo con uno. Demuestre que
    (i) para cualquier $a \in A$, $(-1_A) \odot a = -a$;
    (ii) $(-1_A) \odot (-1_A) = 1_A$.
37. Termine de justificar que la estructura del ejemplo 1.77 es un anillo conmutativo con uno que no es dominio entero. Diga cuáles son sus divisores propios de cero, cuáles son sus unidades, y qué elementos tienen asociados y quiénes son sus asociados, justificando sus respuestas.
38. Revise la demostración de la equivalencia entre ser dominio entero y cumplir la ley de la cancelación del teorema 1.83.
39. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo conmutativo con uno. Sea a una unidad. Revise la demostración de que entonces su inverso multiplicativo es único.
40. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo conmutativo con uno. Demuestre lo siguiente.
    (i) Si a y b son unidades de A, entonces $a \odot b$ es una unidad.
    (ii) 1_A es una unidad.
    (iii) Si a es una unidad de A, entonces a^{-1} también es una unidad.
    (iv) a es una unidad si y sólo si $-a$ es una unidad.
41. Sea A un conjunto y considere $\mathcal{P}(A)$ (el conjunto potencia de A). Definimos $\oplus : \mathcal{P}(A)^2 \to \mathcal{P}(A)$ y $\odot : \mathcal{P}(A)^2 \to \mathcal{P}(A)$ de la siguiente manera: $B \oplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ y $B \odot C = B \cap C$. Conteste las siguientes preguntas justificando sus respuestas:
    (i) ¿es $(\mathcal{P}(A), \oplus, \odot)$ un anillo?
    (ii) si sí es un anillo, ¿es conmutativo?
    (iii) si sí es anillo, ¿tiene uno?
    (iv) si sí es anillo, ¿tiene unidades? y si sí ¿cuáles son?
42. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo conmutativo con uno. Demuestre que la relación definida sobre A como a es asociado de b es una relación de equivalencia.
43. Determine si los siguientes conjuntos, con la suma y el producto restringidos son dominios enteros:
    (i) los enteros pares;
    (ii) los enteros impares;
    (iii) los enteros positivos;
    (iv) los racionales que se pueden expresar con denominador 1 o una potencia de 2.
44. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un dominio entero ordenado y sea $<_A$ la relación definida en 1.95. Termine de demostrar que $(A, <_A)$ es un orden lineal, es decir, vea que $<_A$ es tricotómica.
45. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un dominio entero ordenado, con P el conjunto de los positivos, y sea $<_A$ la relación definida en 1.95. Demuestre lo siguiente:
    (i) $a <_A b$ si y sólo si $a \oplus c <_A b \oplus c$;
    (ii) si $c \in P$, $a <_A b$ si y sólo si $a \odot c <_A b \odot_A c$;

(iii) si $c \in A \setminus P$ y $a <_A b$, entonces $a \odot_A c \geq_A b \odot_A c$;

(iv) si $c \in A \setminus (P \cup \{0_A\})$, $a \odot_A c >_A b \odot_A c$ si y sólo si $a <_A b$.

46. Sea $(A, \oplus, \odot)$ un dominio entero ordenado. Demuestre que para cualesquiera $a, b \in A$,
    (i) $|a \odot b| = |a| \odot |b|$;
    (ii) $|a \oplus b| \leq_A |a| \oplus |b|$.

47. * Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo conmutativo con unitario 1_A. Podemos definir para $a \in A$, $a^0 = 1_A$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = a^n \odot a$. Demuestre que si $n \in \mathbb{N}^+$ y $a, b \in A$, entonces
    $(a \oplus b)^n = \sum_{\oplus k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^k \odot b^{n-k}$.

48. * Pruebe que en un dominio entero ordenado se cumple lo siguiente:
    (i) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$.
    (ii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
    (iii) $a^7 = b^7 \implies a = b$
    (iv) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$

49. * Demuestre lo siguiente:
    (i) En un dominio entero ordenado, toda potencia impar de un elemento negativo es negativa.
    (ii) En un dominio entero, a es unidad si y sólo si $-a$ lo es.
    (iii) En un dominio entero los únicos idempotentes (con respecto al producto) son 0 y 1.

50. * Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo tal que $\forall a \in A(a \odot a = a)$. Demuestre que
    (i) $\forall a \in A(a \oplus a = e)$;
    (ii) A es un anillo conmutativo.

51. * Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo con más de un elemento que cumple que para toda $a \in A$ con $a \neq e$ existe un único $b \in A$ tal que $a \odot b \odot a = a$. Demuestre que
    (i) $\forall a, b \in A((a \neq e \wedge b \neq e) \implies a \odot b \neq e)$;
    (ii) si $a \in A$, $a \neq e$ y b es el único tal que $a \odot b \odot a = a$, entonces $b \odot a \odot b = b$;
    (iii) A tiene uno.

52. * Sea $(A, \oplus, \odot)$ un anillo conmutativo con uno. Considere $\mathcal{U}(A)$ el conjunto de todas las unidades de A. Pruebe que $(\mathcal{U}(A), \odot)$ es un grupo abeliano.