# Tarea I de Teoría de Conjuntos I

Semestre 2018-II

29 de enero de 2018

Profra: Gabriela Campero Arena  Ayudte: Manuel Zúñiga Pérez

1. Supóngase que consideramos seres humanos en lugar de conjuntos y que, si $x$ y $a$ son seres humanos, escribimos $x \in a$ siempre que $x$ sea un ancestro de $a$ (por ejemplo, si $x$ es bisabuelo de $a$), ¿este "sistema" cumpliría el Axioma de Extensionalidad?
2. Para propósitos de este ejercicio, asuma que los únicos conjuntos que existen en el universo son $a = \{b, c\}$, $b = \{\}$, $c = \{e\}$, $d = \{c, e\}$ y $e = \{b\}$, es decir, los únicos elementos de $a$ son $b$ y $c$, $b$ no tiene elementos, etc. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando su respuesta:

(i) $b \in e$ (ii) $e \in b$ (iii) $b \in d$
(iv) $(a \in c \vee c \in d)$ (v) $(b \in c \to a \in a)$ (vi) $(e \in d \leftrightarrow d \in e)$
(vii) $(e \in c \wedge a \in c)$ (viii) $\forall x \neg(x \in b)$ (ix) $\forall s \exists t (s \in t)$
(x) $\forall s \exists t (t \in s)$ (xi) $\forall q (q \in c \to q \in a)$ (xii) $\forall n (n \in e \to n \in a)$
(xiii) $\exists k (k \in d)$ (xiv) $\exists h \forall i ((i \in e \to i \in h) \wedge \neg(h = e))$ (xv) $\exists g \exists w ((g \in e \wedge w \in e) \wedge \neg(g = w))$

3. Para propósitos de este ejercicio, asuma que los únicos conjuntos que existen en el universo son $a = \{\}$, $b = \{d, a\}$, $c = \{a, e\}$, $d = \{a, c, e\}$, $e = \{a\}$ y $f = \{a, b, c, d, e\}$. Las siguientes afirmaciones dicen algo sobre el conjunto $x$, en cada caso hay exactamente uno de estos conjuntos $a, b, c, d, e, f$ que podría ser $x$. Encuentre tal conjunto, justificando su respuesta.

(i) $x \in e$ (ii) $x \notin f$ (iii) $d \subsetneq x$
(iv) $f \subseteq x$ (v) $x \subseteq a$ (vi) $\forall y (y \notin x)$
(vii) $\exists z (z \in x \wedge \forall w (w \in x \to w = z))$ (viii) $(x \in b \wedge x \notin d)$ (ix) $\neg(x \in c \to x \in b)$
(x) $\forall q (x \notin q)$ (xi) $e = \{a, x\}$ (xii) $x = \{\{\}\}$
(xiii) $(x \notin d \leftrightarrow x \subseteq d)$ (xiv) $\exists h \exists j (h \in j \wedge j \in d \wedge x \in h)$ (xv) $\forall n \neg(n \subsetneq x)$
(xvi) $\exists r (\forall u (u \notin r) \wedge r \notin x)$ (xvii) $\exists v (v \subsetneq x \wedge \forall k (k \subsetneq x \to k = v))$
(xviii) $\exists g \exists h \exists i \exists j (j \in i \wedge i \in h \wedge h \in g \wedge g \in x)$
(ix) $\exists y \exists z ((y \in z \wedge z \in x) \wedge y \notin x)$
(xx) $\exists q \exists r \exists s ((q \in x \wedge r \in x \wedge s \in x \wedge q \neq r \wedge r \neq s \wedge q \neq s) \wedge \forall t (t \in x \to (t = q \vee t = r \vee t = s)))$

4. Demuestre que el conjunto que el Axioma de Existencia o del Vacío afirma que existe es único.
5. Demuestre que para cualesquiera conjuntos $a$, $b$, $c$, se tiene que $\{a\} = \{b, c\}$ si y sólo si $a = b = c$.
6. Dados los conjuntos $A$ y $B$, demuestre que el conjunto que tiene como elementos exactamente a $A$ y a $B$ que el Axioma del Par afirma que existe es único.
7. Dado el conjunto $A$, demuestre que el conjunto que tiene como elementos exactamente a los elementos de los elementos de $A$ que el Axioma de la Unión afirma que existe es único.
8. Demuestre que la colección de todos los conjuntos *no* es conjunto, es decir, que el conjunto de todos los conjuntos *no* existe. (*Sugerencia:* Use el Axioma de Separación.) Concluya que para cualquier conjunto $X$, existe un conjunto $A$ que *no* es elemento de $X$.
9. Dados los conjuntos $A$ y $B$ y la propiedad $P(x)$, construya un conjunto $C$ de forma que $C = \{x : P(x)\}$ y justifique usando los axiomas que $C$ es realmente un conjunto.
   (i) $P(x) := \forall z (z \in x \leftrightarrow z = A)$;
   (ii) $P(x) := \forall z (z \in x \leftrightarrow \exists y (\forall w (w \in y \leftrightarrow w = B) \wedge z = y))$;
   (iii) $P(x) := \forall z (z \in x \leftrightarrow (\exists y (z \in y \wedge \forall w (w \in y \leftrightarrow w = A))) \vee (\exists u (z \in u \wedge \forall v (v \in u \leftrightarrow (v = A \vee v = B)))))$.
10. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando con prueba o contraejemplo.
    (i) Todo conjunto es elemento de algún conjunto.
    (ii) Dos conjuntos cualesquiera son simultáneamente elementos de algún mismo conjunto.
    (iii) Para cualquier conjunto $x$, $x = \{x\}$.
    (iv) Para cualesquiera conjuntos $A$ y $B$, $\{A, B\} = A \cup B$.
    (v) Para cualesquiera conjuntos $x$ y $a$, $x \in a$ si y sólo si $\{x\} \subseteq a$.
    (vi)
    (a) $\varnothing \subseteq \varnothing$, (b) $\varnothing \in \varnothing$,
    (c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$, (d) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$,
    (e) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$, (f) $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$,
    (g) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, (h) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
    (i) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, (j) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$.

11. Dado un conjunto $C$ no vacío, justifique la existencia y unicidad del conjunto $\bigcap C := \{x : \forall A \in C(x \in A)\}$, y diga por qué es tan importante la hipótesis de que $C$ no sea el conjunto vacío.
12. Diga explícitamente a qué son iguales los siguientes conjuntos, dando una enumeración exhaustiva de sus elementos:
    (a) $\bigcup \varnothing$, (b) $\bigcup\{\varnothing\}$,
    (c) $\bigcap\{\varnothing\}$, (d) $\bigcup\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
    (e) $\bigcap\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, (f) $\mathcal{P}(\{\{\varnothing\}\})$,
    (g) $\bigcup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, (h) $\bigcap\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
    (i) $\bigcup\{\{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, (j) $\mathcal{P}(\{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\})$,
    (k) $\bigcup(\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}))$, (l) $\mathcal{P}(\bigcup(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}))$,
    (m) $\bigcap(\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}))$, (n) $\mathcal{P}(\bigcap(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}))$,
13. Dados los conjuntos $A, B, C$ y $D$ demuestre la existencia y unicidad del conjunto $\{A, B, C, D\}$.
14. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando prueba o contraejemplo.
    (i) $\forall A(\varnothing \subseteq A \wedge A \subseteq A)$; (ii) $\forall A, B, C\big((A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \rightarrow (A \subseteq C)\big)$;
    (iii) $\forall A, S(A \in S \rightarrow A \subseteq \bigcup S)$; (iv) $\forall A, S(A \in S \rightarrow \bigcup A \subseteq S)$;
    (v) $\forall A \neq \varnothing \forall S(A \in S \rightarrow \bigcap A \subseteq S)$; (vi) $\forall A, S(A \in S \rightarrow \bigcap S \subseteq A)$;
    (vii) $\forall A \neq \varnothing(\bigcap A \subseteq \bigcup A)$; (viii) $\forall A \neq \varnothing(\bigcap A = \bigcup A \rightarrow \exists x(A = \{x\}))$;
    (ix) $\forall A \forall B \neq \varnothing\big(A \cup (\bigcap B) = \bigcap\{A \cup C : C \in B\}\big)$; (x) $\forall A, B\big(A \cap (\bigcup B) = \bigcup\{A \cap C : C \in B\}\big)$;
    (xi) $\forall A, B(A \subseteq B \rightarrow \bigcup B \subseteq \bigcup A)$; (xii) $\forall A, B(A \subseteq B \rightarrow \bigcup A \subseteq \bigcup B)$;
    (xiii) $\forall A \neq \varnothing \forall B(A \subseteq B \rightarrow \bigcap B \subseteq \bigcap A)$; (xiv) $\forall A \neq \varnothing \forall B(A \subseteq B \rightarrow \bigcap A \subseteq \bigcap B)$;
    (xv) $\forall A(A \subseteq \mathcal{P}(A))$ (xvi) $\forall A(\bigcup \mathcal{P}(A) = A)$;
    (xvii) $\forall A(A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A))$; (xviii) $\forall A(\mathcal{P}(\bigcup A) \subseteq A)$;
    (xix) $\forall X(\mathcal{P}(X) \neq \varnothing)$; (xx) $\forall A, B(A \subseteq B \rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$;
    (xxi) $\forall B(\forall a(a \in B \rightarrow \mathcal{P}(a) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup B)))$; (xxii) $\forall A, B(\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B))$;
    (xxiii) $\forall A, B(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B))$; (xxiv) $\forall A, B(\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B))$.
15. (i) Demuestre que para cualquier conjunto $A$, $\mathcal{P}(A) \nsubseteq A$. (*Sugerencia:* Recuerde la Paradoja de Russell y haga algo similar.) En particular se concluye que $\mathcal{P}(A) \neq A$.
    (ii) Demuestre que el conjunto de todos los conjuntos no existe utilizando el inciso anterior.
16. Supongamos que se reemplaza el Axioma de Existencia por el siguiente Axioma:
    *Axioma Débil de Existencia:* Existe al menos un conjunto.
    Demuestre el Axioma de Existencia usando este Axioma Débil de Existencia y el Axioma de Separación.
17. El Axioma del Par, el Axioma de la Unión y el Axioma del Conjunto Potencia pueden reemplazarse por las siguientes versiones más débiles:
    *Axioma Débil del Par:* $\forall A \forall B \exists C(A \in C \wedge B \in C)$.
    *Axioma Débil de la Unión:* $\forall S \exists U \forall x(\exists A(A \in S \wedge x \in A) \rightarrow x \in U)$.
    *Axioma Débil del Conjunto Potencia:* $\forall S \exists P \forall X(X \subseteq S \rightarrow X \in P)$.
    Demuestre los Axiomas del Par, de la Unión y del Conjunto Potencia, usando estas versiones más débiles y el Axioma de Separación.
18. (i) Sean $A$ y $B$ conjuntos cualesquiera. Demuestre que la colección $D$ tal que $x \in D$ si y sólo si $x \in A$ y $x \notin B$ es un conjunto y es único. A $D$ lo denotamos por $A \setminus B$.
    (ii) Demuestre lo siguiente:
    (a) $\forall A, B(\bigcup A \setminus \bigcup B \subseteq \bigcup(A \setminus B)$; (b) $\exists A, B(\bigcup(A \setminus B) \nsubseteq \bigcup A \setminus \bigcup B)$;
    (c) $\forall A, B((A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B))$; (d) $\forall A(A \setminus \varnothing = A)$;
    (e) $\forall(A \setminus A = \varnothing)$; (f) si $A \neq \varnothing$, $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$.
19. Sean $A$ y $B$ conjuntos cualesquiera y sea $X$ un conjunto tal que $A \cup B \subseteq X$ (se puede pensar en este $X$ como en un "universo local"). Demuestre lo siguiente:
    (i) $A \cap (X \setminus A) = \varnothing$; (ii) $A \cup (X \setminus A) = X$;
    (iii) $X \setminus (X \setminus A) = A$; (iv) $A \subseteq B$ si y sólo si $X \setminus B \subseteq X \setminus A$;
    (v) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$; (vi) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$;
    (vii) $A = (A \cap B) \cup (A \cap (X \setminus B))$; (viii) $A \subseteq X \setminus B$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.
20. Sea $A$ un conjunto no vacío y sea $X$ un conjunto tal que $\bigcup A \subseteq X$. Demuestre lo siguiente:
    (i) $X \setminus (\bigcup A) = \bigcap\{X \setminus C : C \in A\}$ (ii) $X \setminus (\bigcap A) = \bigcup\{X \setminus C : C \in A\}$
21. Sea $A$ cualquier conjunto. Demuestre que el "complemento" de $A$ no es un conjunto, es decir, que la colección $\{x : x \notin A\}$ no es un conjunto.