Tarea I de Álgebra Superior II

Semestre 2020-2

29 de enero de 2020

Profra: Gabriela Campero Arena Ayud: Carlos Ochoa

1. Recordemos la idea de la definición de *von Neumann* para el conjunto de los números naturales:
   (a) $\varnothing$ es un número natural.
   (b) Si n es un número natural, entonces $n \cup \{n\}$ es un *número natural*.
   (c) Los *números naturales* son los conjuntos que se obtienen de la aplicación repetida de las reglas (a) y (b) anteriores.

   Haciendo $\varnothing = 0$, $\mathfrak{s}(n) = n \cup \{n\}$ y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, demuestre que esta definición cumple los primeros tres axiomas de Peano.
2. De manera similar a como se justificaron las definiciones de la suma y la multiplicación de los naturales usando el Teorema de Recursión, justifique la definición de la operación exponenciación.
3. En el Ejercicio 1 vimos que la idea de von Neumann para definir a los naturales efectivamente cumple los primeros tres Axiomas de Peano.
   (i) Demuestre que para cualesquiera naturales m y n, $m \in n$ si y sólo si $m \subsetneqq n$.
   Sugerencia: Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}(m \in n \Rightarrow m \subsetneqq n)\}$. Use el Principio de Inducción para probar que $A = \mathbb{N}$. Después vea que $B = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}(m \subsetneqq n \Rightarrow m \in n)\}$ es también todo $\mathbb{N}$ usando el Principio de Inducción y usando que $A = \mathbb{N}$.
   (ii) Pruebe que para todos los números naturales n, $n \notin n$.
4. Demuestre que para toda $n \in \mathbb{N}^+$, hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(m) = n$, es decir, demuestre que la función sucesor $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ es sobre.
5. Demuestre las siguientes afirmaciones respecto de la suma en los naturales:
   (i) Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, $(a + b) + n = a + (b + n)$, es decir, la suma en $\mathbb{N}$ es asociativa.
   (ii) Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a + n = b + n$ si y sólo si $a = b$, es decir, en $\mathbb{N}$ se cumple la ley de cancelación de la suma.
   (iii) (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 + n = n$.
   (b) Para cualesquiera $a, n \in \mathbb{N}$, $a + s(n) = s(a) + n$.
   (c) Para cualesquiera $a, n \in \mathbb{N}$, $a + n = n + a$, es decir, la suma en $\mathbb{N}$ es conmutativa.
   (iv) Para cualesquiera $a, n \in \mathbb{N}$, si $a \neq 0$, entonces $a + n \neq 0$.
   (v) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$.
6. Demuestre las siguientes afirmaciones respecto de la multiplicación en $\mathbb{N}$:
   (i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot n = n$.
   (ii) Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, $(a + b) \cdot n = (a \cdot n) + (b \cdot n)$, es decir, la multiplicación distribuye a la suma en $\mathbb{N}$.
   (iii) (a) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $0 \cdot m = 0$.
   (b) $\forall n, m \in \mathbb{N}(n \cdot m = m \cdot n)$, es decir, la multiplicación en $\mathbb{N}$ es conmutativa.
   (iv) La ley de la asociatividad: Para cualesquiera $a, b, n \in \mathbb{N}$, $(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$.
   (v) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$, $a \cdot b = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.
   (vi) La ley de la cancelación de los no ceros: Para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}$, si $k \neq 0$ y $m \cdot k = n \cdot k$, entonces $n = m$.
7. Usando la definición de la exponenciación y las propiedades demostradas para la suma y la multiplicación, demuestre las leyes de los exponentes en $\mathbb{N}$:
   (i) Para cualesquiera naturales a, n y m, $a^n a^m = a^{n+m}$.
   (ii) Para cualesquiera naturales a, n y m, $(a^n)^m = a^{nm}$.
   (iii) Para cualesquiera naturales a, n y m, $(nm)^a = n^a m^a$.
8. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, demuestre lo siguiente.
   (i) Si $m < n$, el $t \in \mathbb{N}^+$ tal que $m + t = n$ es único.
   (ii) $m \leq n$ si y sólo si existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + t$. Además, en este caso, dicho t es único.
9. Demuestre que las siguientes afirmaciones se cumplen:
   (i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n$. (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $0 < n$. (iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n < s(n)$.
   (iv) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, si y sólo si $s(n) \leq m$.
   (v) Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \neq 0$, entonces $1 \leq n$. (vi) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < s(n)$.
10. Demuestre que $(\mathbb{N}, <)$ es un orden lineal.
11. Sean m y n números naturales. Sabemos por el ejercicio anterior que el orden es tricotómico, es decir, que $m < n$, o $m = n$, o $m > n$. Es decir, se da al menos uno de estos tres casos. Demuestre que solamente puede darse uno de estos tres casos. Es decir, demuestre que se da a lo más uno de estos tres casos, concluyendo que se da uno y sólo uno de los tres casos.
12. Demuestre las siguientes afirmaciones con respecto al orden y las operaciones en $\mathbb{N}$:

(i) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, si $m \neq 0$, entonces $n < n + m$.
(ii) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq n + m$.
(iii) Para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}$, $n < m$ si y sólo si $n + k < m + k$.
(iv) Para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}$, si $k \neq 0$ y $n < m$, entonces $n \cdot k < m \cdot k$.
(v) Para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}$, si $n \cdot k < m \cdot k$, entonces $n < m$.
(vi) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, si $m \neq 0$, entonces $n \leq n \cdot m$.
(vii) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}^+$, si $m \neq 1$, entonces $n < n \cdot m$.

13. Demuestre lo siguiente:
    (i) El producto de dos naturales consecutivos es par. *Observación:* Por definición x es par si sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$ y x es impar si sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k + 1$, además puede dar por hecho que todo natural es par o es impar y que si un natural no es par entonces es impar y viceversa. Usando todo esto, no se necesita inducción para demostrarlo.
    (ii) El producto de 3 naturales consecutivos es múltiplo de 6. *Sugerencia:* Hágalo por inducción y utilice el ejercicio anterior.

14. Demuestre lo siguiente por inducción.
    (i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
    (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
    (iii) Para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

15. Demuestre lo siguiente:
    (i) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$.
    (ii) Para toda $n \geq 4$, $2^n < n!$.
    (iii) Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}^+$, $na^{n-1}b \leq (n-1)a^n + b^n$.
    (iv) Pruebe que la suma de los ángulos internos de un polígono de $n \geq 3$ lados es $(n-2)180°$, usando inducción sobre n, dando por hecho que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.

16. Diga cuál es el error en la siguiente "demostración" por inducción:
    Sea $n \geq 1$. Demuestre que dadas cualesquiera n líneas en $\mathbb{R}^2$, éstas son paralelas.
    <u>Paso base</u>. Si $n = 1$, como toda línea es paralela a sí misma, la afirmación es cierta.
    <u>Paso inductivo</u>. *Hipótesis de inducción:* Supongamos que la afirmación es cierta para n, es decir, que cualesquiera n líneas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas.
    Sean $L_1, L_2, ..., L_n, L_{n+1}$ líneas cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Denotando con $L \parallel M$ el hecho de que las líneas L y M sean paralelas, por la hipótesis de inducción, tenemos que $L_1 \parallel L_2 \parallel ... \parallel L_n$. También por la hipótesis de inducción, $L_2 \parallel L_3 \parallel ... \parallel L_n \parallel L_{n+1}$, entonces, como la relación ser paralela es transitiva $L_1, L_2, \ldots, L_n, L_{n+1}$ son paralelas.
    Por lo tanto, cualesquiera $n + 1$ líneas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas.
    ¡Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, cualesquiera n líneas en $\mathbb{R}^2$ son paralelas!
17. Diga cuál es el error en la siguiente "demostración"por inducción:
    En todo conjunto de $n \geq 1$ círculos en $\mathbb{R}^2$, todos los círculos tienen el mismo radio.
    <u>Paso base</u>. Si $n = 1$, todo círculo en el conjunto tiene el mismo radio, por lo que la afirmación es cierta para $n = 1$.
    <u>Hipótesis de inducción</u>. Supongamos que la afirmación es cierta para n, es decir, que cualesquiera n círculos en $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo radio. Sean $C_1, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}$ círculos cualesquiera en $\mathbb{R}^2$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $C_1, C_2, \cdots, C_n$ tienen el mismo radio. También por la hipótesis de inducción, tenemos que $C_2, C_3, \cdots, C_n$ y C_{n+1} tienen el mismo radio, entonces, todos los círculos $C_1, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}$ tienen el mismo radio.
    Por lo tanto, cualesquiera $n + 1$ círculos en $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo radio. ¡Por lo tanto, para todo $n \geq 1$, cualesquiera n círculos en $\mathbb{R}^2$ tienen el mismo radio!
18. Dé un ejemplo de un conjunto A de números que no satisfaga el Principio del Buen Orden, justificando su respuesta.
19. Demuestre lo siguiente:
    (i) $0^< = \varnothing$.
    (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $s(n)^< = n^< \cup \{n\}D$.
    (iii) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ si y sólo si $n^< \subseteq m^<$.
    (iv) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ si y sólo si $n^< \subsetneq m^<$.

20. Demuestre el Segundo Principio de Inducción.

21. Demuestre que el Segundo Principio de Inducción y el Principio del Buen Orden son equivalentes.

22. Demuestre que no hay ningún número natural entre el 0 y el 1.

23. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que no hay ningún número natural entre n y $s(n)$. Encuentre dos demostraciones, una usando el Primer Principio de Inducción y otra utilizando el Principio del Buen Orden.