Sem. de Fil. de las Matemáticas y Log. de la Ciencia
LÓGICAS EPISTÉMICA Y TEMPORAL

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Lógica epistémica

La lógica epistémica trata de capturar (parte de) la noción de conocimiento. La versión que veremos incluye (a) la existencia de varios *agentes cognoscitivos* y (b) conocimiento común. Sean

- U un conjunto de agentes;
- $A \subseteq U$
- $a \in U$;

Entonces, la *sintaxis* de la lógica epistémica es:

$$\alpha ::= p_i \mid q_i \mid r_i \mid \neg\alpha \mid (\alpha \vee \alpha) \mid \cdots \mid K_a\alpha \mid E_A\alpha \mid C_A\alpha$$

$K_a\alpha$	se leerá como	"el agente a sabe que α"
$E_A\alpha$	se leerá como	"todos los agentes en A saben que α"
$C_A\alpha$	se leerá como	"es conocimiento común entre los agentes en A que α"

Semántica I

La definición formal de la semántica hace que

- El operador K sea en realidad un operador de necesidad en lógica multimodal (con una modalidad por agente)

$$K_a\alpha \equiv_{def} [a]\alpha.$$

- Las fórmulas con el operador E sean abreviaturas (en caso de que A sea finito):

$$E_A\alpha \equiv_{def} \bigwedge_{a\in A} K_a\alpha.$$

- Pero el conocimiento común es una noción distinta:

$$C_A\alpha \Rightarrow K_a\alpha \wedge K_aK_a\alpha \wedge \cdots \wedge K_bK_a\alpha \wedge \cdots \qquad \forall a, b \in A.$$

Semántica II

De nuevo, se tiene un marco $\mathcal{F} = \langle W, R, A\rangle$, con $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times A \times \mathcal{W}$, A un conjunto de agentes, $w \in \mathcal{W}$ y una evaluación $e : P_0 \times \mathcal{W} \to \{V, F\}$. Entonces

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{F}, e, w \models p & \text{sii} & e(p, w) = V \qquad \forall p \in P_0 \\
 & \cdots & \\
\mathcal{F}, e, w \models K_a\alpha & \text{sii} & \forall v \in W \,.\, \text{si } w \xrightarrow{a} v \text{ entonces } \mathcal{F}, e, v \models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w \models E_A\alpha & \text{sii} & \forall a \in A \,.\, \forall v \in W \,.\, \text{si } w \xrightarrow{a} v \text{ entonces } \mathcal{F}, e, v \models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w \models C_A\alpha & \text{sii} & \forall v \in W \,.\, \text{si } w \xrightarrow{A}{}^* v \text{ entonces } \mathcal{F}, e, v \models \alpha
\end{array}$$

La relación $\xrightarrow{A}{}^* \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ se define inductivamente:

$$\begin{array}{lll}
w \xrightarrow{A}{}^0 w & \text{sii} & w \in \mathcal{W} \\
w \xrightarrow{A}{}^1 v & \text{sii} & \exists a \in A \,.\, w \xrightarrow{a} v \\
w \xrightarrow{A}{}^{n+1} v & \text{sii} & \exists u \in \mathcal{W} \,.\, w \xrightarrow{A}{}^n u \wedge u \xrightarrow{A}{}^1 v \\
w \xrightarrow{A}{}^* v & \text{sii} & \exists n \in \mathbb{N} \,.\, w \xrightarrow{A}{}^n v
\end{array}$$

Semántica III

Nota. Obsérvese la ausencia de un operador análogo a $\langle a \rangle$. Podría definirse desde luego

$$P_a\alpha \equiv_{def} \neg K_a \neg \alpha,$$

pero su interpretación no corresponde claramente con una noción intuitiva de creencia, por ejemplo.

Sistema de demostración

Un sistema axiomático para la lógica epistémica contienen los axiomas de $S5$ "especializados":

K	$K_a(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (K_a\alpha \Rightarrow K_a\beta)$
T	$K_a\alpha \Rightarrow \alpha$
4	$K_a\alpha \Rightarrow K_aK_a\alpha$
5	$\neg K_a\alpha \Rightarrow K_a\neg K_a\alpha$

Lógica temporal

La lógica temporal formaliza una noción de tiempo *discreta*. Existen al menos dos versiones:

- LTL lógica temporal de tiempo lineal;
- CTL lógica temporal de tiempo ramificado.

En ambas un estado en el tiempo corresponde a un mundo en un universo de Kripke.
La segunda considera la posibilidad de que el tiempo "se ramifique": puede haber varios futuros posibles y se pueden hacer afirmaciones sobre qué pasa en las otras "ramas" del tiempo.
Aquí se abordará sólo la primera lógica, por simplicidad.

Sintaxis de LTL

$$\alpha ::= p_i \mid q_i \mid r_i \mid \neg\alpha \mid \cdots \mid \Diamond\alpha \mid \Box\alpha \mid \circ\alpha.$$

Los operadores modales se leerán ahora de la siguiente forma:

$\Box\alpha$	"α vale en todos los estados futuros"
$\Diamond\alpha$	"α vale en algún estado futuros"
$\circ\alpha$	"α vale en el siguiente estado"
α U β	"α vale en este estado y en estados futuros al menos hasta el momento en que β valga" o bien "α vale hasta que β valga".

Los operadores $\Box$, $\Diamond$ y $\circ$ suelen presentarse también como G, F y X, respectivamente.

Semántica de la lógica temporal

Para definir la semántica, se utilizará un marco de Kripke. $\rightarrow$ representa la relación de accesibilidad y $\rightarrow^*$, su cerradura transitiva y reflexiva.

$\mathcal{F}, e, w$	$\models p$	sii	$e(p, w) = V \quad \forall p \in P_0$
		...	
$\mathcal{F}, e, w$	$\models \circ\alpha$	sii	$\forall v \in W$. si $w \rightarrow v$ entonces $\mathcal{F}, e, v \models \alpha$
$\mathcal{F}, e, w$	$\models \Box\alpha$	sii	$\forall v \in W$. si $w \rightarrow^* v$ entonces $\mathcal{F}, e, v \models \alpha$
$\mathcal{F}, e, w$	$\models \Diamond\alpha$	sii	$\exists v \in W$. $w \rightarrow^* v$ y $\mathcal{F}, e, v \models \alpha$
$\mathcal{F}, e, w$	$\models \alpha \mathsf{U} \beta$	sii	$\exists v \in W$. $w \rightarrow^* v$ y $\mathcal{F}, e, v \models \beta$ y $\forall u \in W$. si $w \rightarrow^* u$ y $u \rightarrow^* v$ entonces $\mathcal{F}, e, u \models \alpha$

Algunas propiedades expresables en LTL

Primero agregaremos una nueva fórmula atómica **F** con la propiedad de que

$$\mathcal{F}, e, w \not\models \mathbf{F} \qquad \forall w \in W.$$

Entonces

halt	$\equiv_{def}$	$\circ F$	el proceso se detuvo
fin	$\equiv_{def}$	$\Diamond$**halt**	el proceso se detendrá algún día
inf	$\equiv_{def}$	$\neg$**fin**	el proceso es infinito

Sistemas de demostración para la lógica temporal

K $\Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \Box\alpha \Rightarrow \Box\beta$

$\Box(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$

$\Diamond\alpha \Leftrightarrow \alpha \vee \circ\Diamond\alpha$

$\circ(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \circ\alpha \vee \circ\beta$

$\circ(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \circ\alpha \wedge \circ\beta$

$\alpha \wedge \Box(\alpha \Rightarrow \circ\alpha) \Rightarrow \Box\alpha$

N $\dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

Cálculo μ

- El cálculo μ permite representar proposiciones *recursivas*, i.e., que se refieren a sí mismas.
- Consta de un conjunto de variables $X, Y, Z, X_0, \ldots$ proposicionales y un solo operador μ.
- Las fórmulas recursivas deben cumplir ciertas restricciones sintácticas para que la semántica esté bien definida.

Sintaxis

La sintaxis del cálculo μ proposicional es la siguiente:

$$\alpha ::= p_i \mid q_i \mid r_i \mid \neg\alpha \mid \cdots \mu X \,.\, \alpha(X)$$

donde X es una variable proposicional.
Intuitivamente, si la fórmula α contiene a X como una de sus proposiciones atómicas, $\mu X \,.\, \alpha(X)$ es la fórmula que resulta de sustituir a X en α por $\mu X \,.\, \alpha(X)$.
Es posible definir un operador dual

$$\nu X \,.\, \alpha(X) \equiv_{def} \neg\mu X \,.\, \neg\alpha(\neg X).$$

Pero la semántica de este operador es diferente.

Semántica

Satisfacción, verdad y validez se definen en términos del cálculo de proposiciones (modal). Para el caso del operador μ combinado con lógica modal se tiene:

$$\mathcal{F}, e, w \models \mu X \,.\, \alpha(X) \qquad \text{sii} \qquad \mathcal{F}, e, w \models \alpha_{[X/\mu X \,.\, \alpha(X)]}.$$

Un ejemplo concreto es:

$$\begin{array}{lcl} \alpha(X) & = & p \vee \langle\cdot\rangle X \\ \beta & = & \mu X \,.\, \alpha(X) \end{array}$$

que es satisfecha por un modelo en el que p sea verdadera en el presente o en alguna transición futura.
Matemáticamente, la semántica de una fórmula sólo está bien definida si la parte $\alpha(x)$ cumple con la restricción de monotonía: X aparece bajo el alcance de un número par de negaciones.