Sem. de Fil. de las Matemáticas y Log. de la Ciencia LÓGICA MODAL GENERAL

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Lógica modal

- La lógica modal originalmente intentaba capturar el significado de los operadores "es necesario que. . . " y "es posible que . . . "
- Estos operadores no se pueden definir por medio de funciones booleanas.
- Otros conceptos también se pueden expresar como operadores modales: temporalidad, acciones, conocimiento, etc.
- La semántica de estos conceptos es similar a la semántica de necesidad y posibilidad.
- Esto ha permitido aplicar la lógica modal en ámbitos distintos a la filosofía: matemáticas, computación, teoría de juegos, etc.

Sintaxis de la lógica modal proposicional

La sintaxis de la lógica modal proposicional es:

$$\alpha ::= p_i \mid q_i \mid r_i \mid \neg\alpha \mid (\alpha\vee\alpha) \mid (\alpha\wedge\alpha) \mid (\alpha \Rightarrow \alpha) \mid (\alpha \Leftrightarrow \alpha) \mid \Diamond\alpha \mid \Box\alpha$$

Los últimos dos operadores modales no existen en el cálculo de proposiciones

$\Diamond\alpha$	se leerá	"posiblemente α"
$\Box\alpha$	se leerá	"necesariamente α"

Alternativamente, el operador $\Box$ se puede definir en términos de $\Diamond$ (y viceversa):

$$\Box\alpha \equiv_{def} \neg\Diamond\neg\alpha.$$

Mundos posibles

La semántica de la lógica modal no se puede definir con funciones booleanas. En su lugar se emplean marcos

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle,$$

donde

$$\mathcal{W} = \{w, w', \dots\}$$

es un *conjunto de mundos posibles* y

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$$

es una *relación de accesibilidad* entre mundos.

Satisfacción y verdad

Las proposiciones atómicas no reciben un valor de verdad único, sino uno por cada mundo posible.
Sea $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ un marco y sea P_0 el conjunto de proposiciones atómicas.
Una función de evaluación es del tipo

$$e : P_0 \times \mathcal{W} \to \{V, F\}.$$

La relación de satisfacción $\models$ es relativa a $\mathcal{F}$, a una evaluación e y a un mundo específico $w \in \mathcal{W}$:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{F}, e, w & \models p & \text{sii} \quad e(p, w) = V \qquad \forall p \in P_0 \\
\mathcal{F}, e, w & \models \neg\alpha & \text{sii} \quad \mathcal{F}, e, w \not\models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w & \models \alpha \vee \psi & \text{sii} \quad \mathcal{F}, e, w \models \alpha \text{ o bien } \mathcal{F}, e, w \models \psi \\
\mathcal{F}, e, w & \models \alpha \wedge \psi & \text{sii} \quad \mathcal{F}, e, w \models \alpha \text{ y } \mathcal{F}, e, w \models \psi \\
\mathcal{F}, e, w & \models \alpha \Rightarrow \psi & \text{sii} \quad \text{si } \mathcal{F}, e, w \models \alpha \text{ implica que } \mathcal{F}, e, w \models \psi \\
\mathcal{F}, e, w & \models \alpha \Leftrightarrow \psi & \text{sii} \quad \mathcal{F}, e, w \models \alpha \text{ sii } \mathcal{F}, e, w \models \psi
\end{array}$$

El caso de los operadores modales

El caso de los operadores modales es obviamente distinto:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{F}, e, w & \models \Box\alpha & \text{sii} \quad \forall v \in W \,.\, \text{si } R(w, v) \text{ entonces } \mathcal{F}, e, v \models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w & \models \Diamond\alpha & \text{sii} \quad \exists v \in W \,.\, R(w, v) \text{ y } \mathcal{F}, e, v \models \alpha
\end{array}$$

Con estas definiciones, la satisfacción se puede generalizar:

$$\mathcal{F}, e \models \alpha \qquad \text{sii} \qquad \forall w \in W \,.\, \mathcal{F}, e, w \models \alpha.$$

En este caso, diremos que α es verdadera en e. Finalmente, definiremos *validez respecto a* un marco $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} \models \alpha \qquad \text{sii} \qquad \forall e \,.\, \mathcal{F}, e \models \alpha,$$

y *validez en general*

$$\models \alpha \qquad \text{sii} \qquad \forall \mathcal{F} \,.\, \mathcal{F} \models \alpha.$$

Propiedades de la relación de accesibilidad

P_1	$\forall u \,.\, \exists v \,.\, u \to v$	serial
P_2	$\forall u \,.\, u \to u$	reflexiva
P_3	$\forall u, v \,.\, u \to v \Rightarrow v \to u$	simétrica
P_4	$\forall u, v, w \,.\, u \to v \wedge v \to w \Rightarrow u \to w$	transitiva
P_5	$\forall u, v, w \,.\, u \to v \wedge u \to w \Rightarrow v \to w$	euclidiana
P_6	$\forall u, v, w \,.\, u \to v \wedge u \to w \Rightarrow v = w$	funcional parcial
P_7	$\forall u \,.\, \exists! v \,.\, u \to v$	funcional
P_8	$\forall u, v \,.\, u \to v \Rightarrow (\exists w \,.\, u \to w \wedge w \to v)$	densa débil
P_9	$\forall u, v, w \,.\, u \to v \wedge u \to w \Rightarrow v \to w \vee w \to v \vee v = w$	conexa débil
P_{10}	$\forall u, v, w \,.\, u \to v \wedge u \to w \Rightarrow (\exists z \,.\, v \to z \wedge w \to z)$	dirigida débil

Esquemas modales

S_1	$\Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$	$D(\alpha)$
S_2	$\Box\alpha \Rightarrow \alpha$	$T(\alpha)$
S_3	$\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$	$B(\alpha)$
S_4	$\Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha$	$4(\alpha)$
S_5	$\Diamond\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$	$5(\alpha)$
S_6	$\Diamond\alpha \Rightarrow \Box\alpha$	
S_7	$\Diamond\alpha \Rightarrow \Box\alpha$	$Q(\alpha)$
S_8	$\Box\Box\alpha \Rightarrow \Box\alpha$	$R(\alpha)$
S_9	$\Box(\alpha \wedge \Box\alpha \Rightarrow \beta) \vee \Box(\beta \wedge \Box\beta \Rightarrow \alpha)$	
S_{10}	$\Diamond\Box\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$	$G(\alpha)$

Equivalencia entre propiedades de R y esquemas modales

Teorema. Sea $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$. Entonces

$$\mathcal{F} \models S_i \qquad \text{sii} \qquad R \text{ satisface } P_i.$$

Demostración. Se procede caso por caso.

Reglas de inferencia

$MP \quad \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$

$K \quad \Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)$

$N \quad \dfrac{\alpha}{\Box\alpha}$

$EN \quad \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta}{\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta} \qquad \dfrac{\alpha \Rightarrow \beta}{\Diamond\alpha \Rightarrow \Diamond\beta}$

Sistemas axiomáticos particulares

Todos los sistemas axiomáticos para lógica modal incluyen el axioma K y las reglas MP y N. La regla EN puede obtenerse a partir de K, MP y N. Otros sistemas son:

$$KD \qquad KT \qquad KB \qquad K4 \qquad K5$$

Los siguientes sistemas reciben un nombre particular

$$S4 = KT4 \qquad S5 = KT5.$$

En adelante, $\vdash_S$ designará la relación de deducibilidad en un sistema S. Algunos sistemas son "subsistemas de otros", es decir, sus teoremas son teoremas de sistemas más poderosos. Por ejemplo

$$\vdash_{KD5} \alpha \qquad \text{implica} \qquad \vdash_{S5} \alpha \qquad \forall\alpha$$

Lógicas multimodales

Una lógica multimodal tiene una sintaxis similar a la lógica modal, salvo que ahora se cuenta con un conjunto de etiquetas $\mathcal{L}$.
Sea $a \in \mathcal{L}$. La sintaxis de una lógica multimodal es

$$\alpha ::= p_i \mid q_i \mid r_i \mid \neg\alpha \mid \cdots \mid \langle a \rangle \alpha \mid [a]\alpha \mid \langle \cdot \rangle \alpha \mid [\,\cdot\,]\alpha.$$

Los símbolos modales anteriores no tienen una lectura universalmente aceptada. Una posibilidad es:

$\langle a \rangle \alpha$	se leerá	"después de transitar por a, posiblemente α"
$[a]\alpha$	se leerá	"después de transitar por a, necesariamente α"
$\langle \cdot \rangle \alpha$	se leerá	"después de cualquier transición, posiblemente α"
$[a]\alpha$	se leerá	"después de cualquier transición, necesariamente α"

Semántica de las lógicas multimodales

Un marco es una terna

$$\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{L} \rangle,$$

donde $\mathcal{L}$ es un conjunto de *etiquetas* y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{L} \times \mathcal{W}$. Sean $w, v \in \mathcal{W}$ y $a \in \mathcal{L}$. Si $\mathcal{R}(w, a, v)$ escribiremos

$$w \xrightarrow{a} v.$$

Finalmente, sea $e : P_0 \times \mathcal{W} \to \{V, F\}$ una evaluación. Entonces

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{F}, e, w & \models p & \text{sii} & e(p, w) = V \qquad \forall p \in P_0 \\
 & & \ldots & \\
\mathcal{F}, e, w & \models [a]\alpha & \text{sii} & \forall v \in W \,.\, \text{si } w \xrightarrow{a} v \text{ entonces } \mathcal{F}, e, v \models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w & \models \langle a \rangle\alpha & \text{sii} & \exists v \in W \,.\, w \xrightarrow{a} v \text{ y } \mathcal{F}, e, v \models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w & \models [\cdot]\alpha & \text{sii} & \forall a \in \mathcal{L} \,.\, \forall v \in W \,.\, \text{si } w \xrightarrow{a} v \text{ entonces } \mathcal{F}, e, v \models \alpha \\
\mathcal{F}, e, w & \models \langle \cdot \rangle\alpha & \text{sii} & \exists a \in \mathcal{L} \,.\, \exists v \in W \,.\, w \xrightarrow{a} v \text{ y } \mathcal{F}, e, v \models \alpha
\end{array}$$

Sistemas axiomáticos

Los siguientes axiomas son versiones multimodales de D, B, 5 y G:

$$\begin{array}{rcl}
[a]\alpha & \Rightarrow & \langle b \rangle \alpha \\
\alpha & \Rightarrow & [a]\langle b \rangle \alpha \\
\langle a \rangle & \Rightarrow & [b]\langle c \rangle \alpha \\
\langle a \rangle [b]\alpha & \Rightarrow & [c]\langle d \rangle \alpha
\end{array}$$

Sin embargo, los sistemas multimodales suelen tener axiomas específicos relacionados con su dominio de aplicación. Esto se verá en la sección de lógicas especializadas.