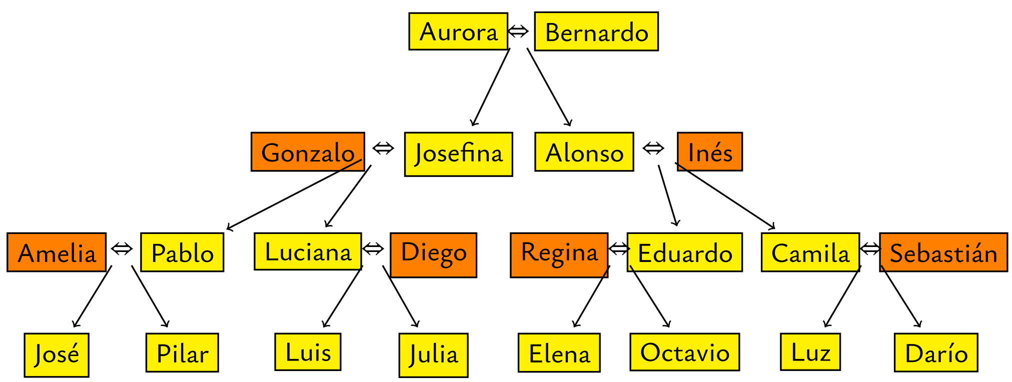
Lógica 1. Ejercicio 2

En la siguiente figura está el árbol genealógico (parcial) de una familia. Los nodos en amarillo indican descendientes directos de la pareja inicial (Aurora & Bernardo) y los anaranjados las parejas de varios descendientes. $\Leftrightarrow$ representa un matrimonio.

Nota. Por simplicidad, se trata de una familia "tradicional" donde los vínculos familiares coinciden con los biológicos, pero no debe tomarse como un juicio de valor contra otros modelos familiares.



Suponiendo que el universo se reduce a las personas que aparecen en el diagrama, formaliza las siguientes nociones:

1. La relación de primo: designa un símbolo de predicado para denotarla y una fórmula que dos individuos deben cumplir para ser primos.
2. Un símbolo para denotar el ancestro femenino común más cercano.
3. La relación de pariente político, con su respectiva fórmula.
4. ¿La relación de primo es transitiva? ¿Y la de pariente político? Expresa tus respuestas con fórmulas.
5. Señala las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:
   (a) $(\forall x.(\exists y.P_2^2(x,z)) \vee P_2^1(y))$;
   (b) $(\exists x.(\forall z.(\exists y.P_1^3(x,y,z)))) \Leftrightarrow P_2^3(x_1,y,z_2)$;
   (c) $(\exists x.P_1^3(x,y,z)) \Rightarrow P_1^1(x)$;

(d) $(\forall y.\, P_1^3(x,y,z)) \land (\exists z.\, P_2^3(x,y,z)) \land (\forall x.\, P_3^3(x,y,z))$.

6. Realiza las siguientes sustituciones:

   (a) $((\forall x.\, (\exists y.\, P_2^2(x,z)) \lor P_2^1(y))_{[x:=f_1^1(z)]})_{[y:=f_3^2(z,x)]}$;

   (b) $(((\exists x.\, (\forall z.\, (\exists y.\, P_1^3(y, f_1^2(x,y), z)))) \Leftrightarrow P_2^3(x_1, y, z_2))_{[x_1:=f_1^3(x,y,z_3)]})_{[z:=f_2^2(y,x)]}$.

7. Dada la siguiente interpretación, di si las fórmulas siguientes son satisfechas, verdaderas, o válidas (o ninguno de los anteriores casos). El universo son los filósofos de la antigüedad clásica. Tenemos además que

$$\begin{array}{rcl} \Psi(x) & = & \text{Sócrates} \\ \Psi(c) & = & \text{Platón} \\ \Psi(c_1) & = & \text{Aristóteles} \\ \Phi(f_1^1) & = & \text{El maestro del filósofo} \\ \Pi(P_1^2) & = & \text{El primer filósofo precede al segundo} \end{array}$$

   Y las fórmulas son:

   (a) $P_1^2(x,c)$;

   (b) $P_1^2(c,c_1)$;

   (c) $\forall x.\, P_1^2(f_1^1(x), x)$;

   (d) $\forall x.\, P_1^2(c_1,x) \Rightarrow P_1^2(c,x)$.

8. Da un modelo para los siguientes conjuntos de fórmulas, explicando en cada caso por qué la fórmula es verdadera en el modelo:

$$\exists x.\, \forall y.\, P_1^2(x,y) \land P_2^2(y,x) \qquad P_1^1(c) \qquad \forall x.\, \exists y.\, P_1^2(x,y) \lor P_2^2(y,x).$$

9. Demuestra los siguientes teoremas de deducción natural:

   (a) $\vdash_N (\exists x.\, P_1^1(x) \lor P_2^1(x)) \Leftrightarrow (\exists x.\, P_1^1(x)) \lor (\exists x.\, P_2^1(x))$;

   (b) $\forall x.\, (\exists y.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(y)) \vdash_N \neg(\exists x.\, (\forall y.\, P_1^1(x) \land \neg P_2^1(y)))$.

10. Demuestra la corrección de la regla $I\exists$.