LÓGICA I
INTUICIONISMO

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Unas palabras sobre intuicionismo

"The semantics for intuitionistic logic described in the following reflects a more dynamic approach: Our current knowledge about the truth of statements can improve. Some statements whose truth status was previously indeterminate can be established as true. The value true corresponds to firmly established truth that is preserved with the advancement of knowledge, and the value false corresponds to "not yet true". To refute a formula φ, that is, to establish $\neg\varphi$ at a stage w it is necessary that $V(\varphi, w') = false$ for all future stages w'."

Grigori Mints, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, p. 47.

Intuicionismo

- El intuicionismo es la alternativa a la lógica clásica mejor conocida.
- Existen distintas formas de justificarlo, pero todas tienen el mismo efecto: el rechazo de varios principios y teoremas de la lógica clásica, entre los que destaca el tercio excluso.
- Un sistema de demostración intuicionista muy conocido es la *deducción natural intuicionista*, en la que se elimina la regla C.
- En esta versión, se introduce una nueva constante proposicional $\bot$ (siempre falsa) y la negación de una fórmula $\neg\alpha$ se considera una abreviatura de $\alpha \Rightarrow \bot$.
- $\vdash_I$ denotará en adelante los teoremas de la deducción natural intuicionista.
- Presentaremos una semántica formal del intuicionismo basada en marcos de Kripke.

Ejemplo 1

En muchas demostraciones, no se nota la diferencia entre $\vdash_N$ y $\vdash_I$. Por ejemplo, $\vdash_I p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$:

1	p	*Hipótesis*
2	q	*Hipótesis*
3	p	1
4	$q \Rightarrow p$	$I\Rightarrow$
5	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	$I\Rightarrow$

Aunque parece simple, hay teoremas clásicos que son indemostrables en $\vdash_I$, entre otros $p \vee \neg p$.

Algunos teoremas intuicionistas

Tenemos sólo una dirección de la doble negación: $\vdash_I p \Rightarrow \neg\neg p$:

1	p	*Hipótesis*
2	$\neg p$	*Hiptesis*
3	$\perp$	$E\neg 1, 2$
4	$\neg\neg p$	$I\neg 2$
5	$p \Rightarrow \neg\neg p$	$I\Rightarrow$

Ahora $\vdash_I \neg\neg\perp \Leftrightarrow \perp$. Basta con observar que

$$\neg\neg\perp \equiv_{def} (\perp \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$$

y recordar los teoremas $\vdash_I p \Rightarrow p$ y $\vdash_I p \Rightarrow \neg\neg p$.

Una ley de De Morgan: $\vdash_I \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Parte I

1	$\neg(p \vee q)$	*Hip.*
2	p	*Hip.*
3	$p \vee q$	$I\vee 2$
4	$\perp$	$E\neg 3, 1$
5	$\neg p$	$I\neg 2$
6	q	*Hip.*
7	$p \vee q$	$I\vee 6$
8	$\perp$	$E\neg 7, 1$
9	$\neg q$	$I\neg 6$
10	$\neg p \wedge \neg q$	$I\wedge 5, 9$
11	$\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q$	$I\Rightarrow$

Una ley de De Morgan: $\vdash_I \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$. Parte II

12	$\neg p \wedge \neg q$				*Hip.*
13	$\neg p$				$E\wedge 6$
14	$\neg q$				$E\wedge 6$
15	$p \vee q$				*Hip.*
16	p	*Hip.*	18	q	*Hip.*
17	$\perp$	$E\neg 16, 13$	19	$\perp$	$E\neg 18, 14$
20	$\perp$				$E\vee 15$
21	$\neg(p \vee q)$				$I\neg 15$
22	$\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$				$I\Rightarrow$
23	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$				$I\Leftrightarrow 11, 22$

Una semántica para el intuicionismo

- Dado que no todas las tautologías se pueden demostrar en el intuicionismo, es claro que no es un sistema completo con respecto a la semántica booleana.
- Existen diversas semánticas para el intuicionismo. Aquí se verá una basada en *modelos de Kripke intuicionistas*.
- Se verá también ejemplos de fórmulas válidas e inválidas (entre ellas, una tautología clásica).
- Finalmente, se verá una demostración de corrección para el sistema intuicionista. La completitud se dejará para después.

Marcos de Kripke

- Un marco de Kripke es un par ordenado
$$\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle,$$
donde
$$\mathscr{W} = \{w, w', \ldots\}$$
es un *conjunto de mundos posibles* y
$$\mathscr{R} \subseteq \mathscr{W} \times \mathscr{W}$$
es una *relación de accesibilidad* entre mundos.
- Una relación de accesibilidad es una indicación de qué mundos son accesibles a partir de un mundo dado.
- Si el mundos v es accesible desde el mundo u, es decir si $\mathscr{R}(u, v)$, es común escribir $u \to v$.

Evaluaciones

Las proposiciones atómicas no reciben un valor de verdad único, sino uno por cada mundo posible. Una función de evaluación es del tipo
$$e : P_0 \times \mathscr{W} \to \{V, F\},$$
donde P_0 es el conjunto de proposiciones atómicas.

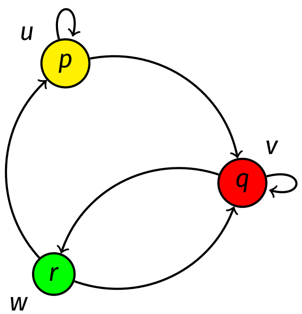
Modelos de Kripke intuicionistas

Un *modelo de Kripke* está formado por dos ingredientes: un *marco de Kripke* $\mathscr{F}$ y una *evaluación* e.
Un *modelo de Kripke intuicionista* cumple además los siguientes requisitos:

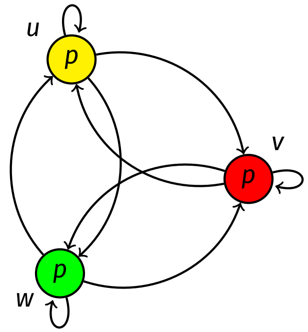
- La relación de accesibilidad $\mathscr{R}$ es reflexiva, i.e., $\forall w \in \mathscr{W}$ se tiene que $w \to w$.
- La relación $\mathscr{R}$ es transitiva, i.e., $\forall u, v, w \in \mathscr{W}$ si $u \to v$ y $v \to w$ entonces $u \to w$.
- La evaluación es monótona, es decir, si para $p \in P_0$ y $u \in \mathscr{W}$ se tiene que $e(p, u) = V$, entonces $\forall v \in \mathscr{W}$, $u \to v$ implica que $e(p, v) = V$.

Ejemplos

- En la siguiente lámina se presentarán los marcos como gráficas dirigidas.
- Los vértices corresponden a los mundos posibles u, v y w y las aristas, a la relación de accesibilidad entre mundos.
- Las evaluaciones se representarán así: las fórmulas atómicas verdaderas en un mundo se escribirán dentro del círculo correspondiente. Las fórmulas que no aparecen en el círculo son falsas.
- A la izquierda tenemos un modelo de Kripke general y a la derecha un modelo de Kripke *intuicionista*.



- la reflexividad falla en w;
- la transitividad falla en $u \to w$ y $v \to u$;
- la monotonía falla: $e(p, u) = V$, pero $u \to v$ y $e(p, v) = F$.



- la relación es reflexiva y transitiva;
- la evaluación es monótona.

Satisfacción de fórmulas I

Ahora se puede definir una relación de satisfacción de fórmulas por parte de modelos intuicionistas.
Sean $\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle$ y e un modelo de Kripke intuicionista y sea $w \in \mathscr{W}$. La relación de satisfacción $\vDash$ se define por inducción en la estructura de las fórmulas:

$$
\begin{array}{lll}
\mathscr{F}, e, w \vDash p & \text{sii} & e(p, w) = V,\ p \text{ una fórmula atómica} \\
\mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \vee \psi & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \text{ o bien } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi \\
\mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \wedge \psi & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \text{ y } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi \\
\mathscr{F}, e, w \vDash \neg\alpha & \text{sii} & \forall v.\text{ si } w \to v \text{ entonces } \mathscr{F}, e, v \nvDash \alpha \\
\mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \Rightarrow \psi & \text{sii} & \forall v.\text{ si } w \to v \text{ entonces} \\
 & & \mathscr{F}, e, v \vDash \alpha \text{ implica que } \mathscr{F}, e, v \vDash \psi \\
\mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \Leftrightarrow \psi & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \Rightarrow \psi \text{ y } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi \Rightarrow \alpha
\end{array}
$$

Satisfacción de fórmulas II

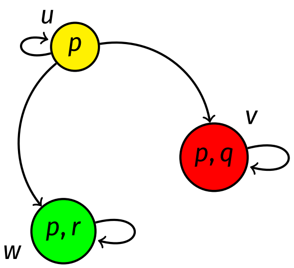
- La satisfacción de la negación requiere mucho más que antes: una fórmula negativa es satisfecha sii no podemos trasladarnos a ningún mundo donde sea satisfecha.
- Igualmente, con la implicación nos vemos obligados a que se cumpla en todos los mundos accesibles al mundo actual.
- Estos dos operadores separan a la lógica clásica de la intuicionista. En lógica modal clásica, la satisfacción de la negación y la implicación se defininen de acuerdo con la concepción booleana de estos conectivos.
- En lógica modal esto significaría que se satisfacen la negación y la implicación sii éstas son fórmulas necesarias.

Verdad y validez intuicionistas

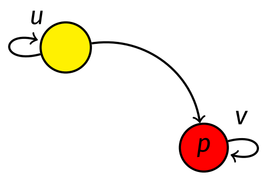
Sean $\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle$ y e un modelo de Kripke intuicionista y sea α una fórmula. Diremos que α es

- *Verdadera* sii $\forall w \in \mathscr{W}. \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha$. En ese caso escribiremos
$$\mathscr{F}, e \vDash \alpha.$$
- *Válida* en $\mathscr{F}$ sii para toda evaluación monótona e' se tiene que $\mathscr{F}, e' \vDash \alpha$. Entonces escribiremos
$$\mathscr{F} \vDash \alpha.$$
- *Válida* sii para todo marco de Kripke reflexivo y transitivo $\mathscr{F}$ y para toda e' monótona se tiene que $\mathscr{F}, e' \vDash \alpha$. En símbolos
$$\vDash \alpha.$$

Algunos ejemplos de fórmulas válidas e inválidas



- $\mathscr{F}, e, w \models p \wedge r$.
- $\mathscr{F}, e, v \not\models p \wedge r$ (falla con r).
- $\mathscr{F}, e \models p \vee q \vee r$.
- $\mathscr{F}, e \not\models p \wedge q$ (falla en u y v).
- $\mathscr{F} \not\models p \vee q \vee r$ (falla si $e'(p, u) = e'(p, v) = e'(p, w) = F$).
- $\mathscr{F} \models p \Rightarrow p$ y $\models p \Rightarrow p$.



- $\mathscr{F}, e \not\models p \vee \neg p$ pues

  $$\mathscr{F}, e, u \not\models p \quad \text{y} \quad \mathscr{F}, e, u \not\models \neg p$$

  ya que

  $$u \to v \quad \text{y} \quad \mathscr{F}, e, v \models p.$$