LÓGICA I
LÓGICA MODAL

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Lógica modal

- La lógica modal originalmente intentaba capturar el significado de los operadores "es necesario que..." y "es posible que ..."
- Estos operadores no se pueden definir por medio de funciones booleanas.
- Otros conceptos también se pueden expresar como operadores modales: temporalidad, acciones, conocimiento, etc.
- La semántica de estos conceptos es similar a la semántica de necesidad y posibilidad.
- Esto ha permitido aplicar la lógica modal en ámbitos distintos a la filosofía: matemáticas, computación, teoría de juegos, etc.

Sintaxis de la lógica modal proposicional

La sintaxis de la lógica modal proposicional introduce dos nuevos operadores unarios:

$$\Diamond\alpha \qquad \Box\alpha$$

donde α es una fórmula.

$\Diamond\alpha$	se leerá	"posiblemente α"
$\Box\alpha$	se leerá	"necesariamente α"

Alternativamente, el operador $\Box$ se puede definir en términos de $\Diamond$ (y viceversa):

$$\Box\alpha \equiv_{def} \neg\Diamond\neg\alpha.$$

Mundos posibles

La semántica de la lógica modal no se puede definir con funciones booleanas. En su lugar se emplean marcos

$$\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle,$$

donde

$$\mathscr{W} = \{w, w', \ldots\}$$

es un *conjunto de mundos posibles* y

$$\mathscr{R} \subseteq \mathscr{W} \times \mathscr{W}$$

es una *relación de accesibilidad* entre mundos.

Satisfacción y verdad

Las proposiciones atómicas no reciben un valor de verdad único, sino uno por cada mundo posible.
Sea $\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle$ un marco y sea P_A el conjunto de proposiciones atómicas. Una función de evaluación es del tipo

$$e : P_A \times \mathscr{W} \to \{V, F\}.$$

La relación de satisfacción $\vDash$ es relativa a $\mathscr{F}$, a una evaluación e y a un mundo específico $w \in \mathscr{W}$:

$$\begin{array}{llll}
\mathscr{F}, e, w & \vDash p & \text{sii} & e(p, w) = V \qquad \forall p \in P_A \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash \neg\alpha & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \nvDash \alpha \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash \alpha \vee \psi & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \text{ o bien } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash \alpha \wedge \psi & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \text{ y } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash \alpha \Rightarrow \psi & \text{sii} & \text{si } \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \text{ implica que } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash \alpha \Leftrightarrow \psi & \text{sii} & \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha \text{ sii } \mathscr{F}, e, w \vDash \psi
\end{array}$$

El caso de los operadores modales

El caso de los operadores modales es obviamente distinto:

$$\begin{array}{llll}
\mathscr{F}, e, w & \vDash \Box\alpha & \text{sii} & \forall v \in W.\, \text{si } \mathscr{R}(w, v) \text{ entonces } \mathscr{F}, e, v \vDash \alpha \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash \Diamond\alpha & \text{sii} & \exists v \in W.\, \mathscr{R}(w, v) \text{ y } \mathscr{F}, e, v \vDash \alpha
\end{array}$$

Con estas definiciones, la satisfacción se puede generalizar:

$$\mathscr{F}, e \vDash \alpha \qquad \text{sii} \qquad \forall w \in W.\, \mathscr{F}, e, w \vDash \alpha.$$

En este caso, diremos que α es verdadera en e. Finalmente, definiremos *validez respecto a* un marco $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F} \vDash \alpha \qquad \text{sii} \qquad \forall e.\, \mathscr{F}, e \vDash \alpha,$$

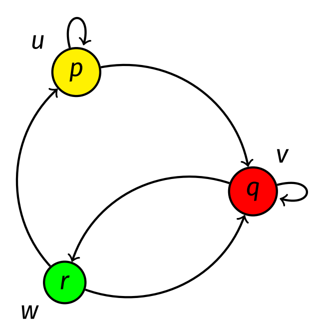
y *validez en general*

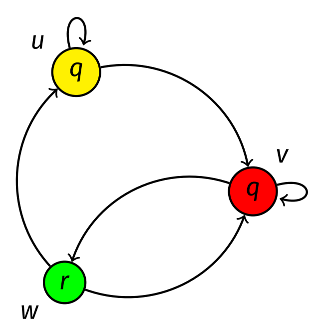
$$\vDash \alpha \qquad \text{sii} \qquad \forall \mathscr{F}.\, \mathscr{F} \vDash \alpha.$$

Ejemplos

- En las siguientes láminas se presentarán los marcos como gráficas dirigidas.
- Los vértices corresponden a los mundos posibles u, v y w y las aristas, a la relación de accesibilidad entre mundos.
- En lo sucesivo, se usará $u \to v$ como una alternativa a $\mathscr{R}(u, v)$.
- Las fórmulas atómicas verdaderas en un mundo se escribirán dentro del círculo correspondiente. Las fórmulas que no aparecen en el círculo son falsas.
- En todos los casos se presenta dos veces el mismo marco, pero con evaluaciones distintas en cada gráfica.
- En la tercera lámina se presenta un caso aparentemente paradójico de un marco con una relación de accesibilidad vacía.

Un solo marco, dos evaluaciones



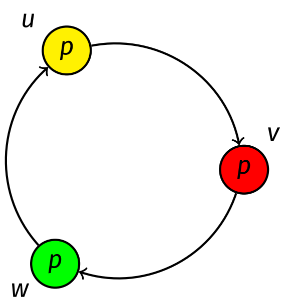


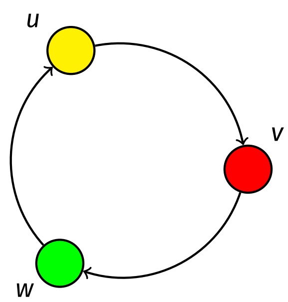
$$\begin{array}{lll}
\mathscr{F}, e, u & \vDash & \Diamond p \\
\mathscr{F}, e, u & \nvDash & \Box p \\
\mathscr{F}, e & \vDash & \Diamond(p \vee q \vee r)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathscr{F}, e, u & \nvDash & \Diamond p \\
\mathscr{F}, e, w & \vDash & \Box q \\
\mathscr{F}, e & \nvDash & \Diamond(p \vee r)
\end{array}$$

(falla en w)

Un solo marco, dos evaluaciones y fórmulas válidas

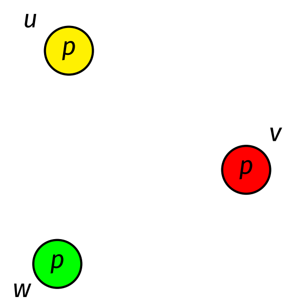


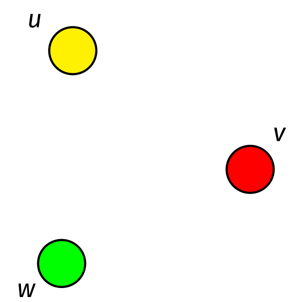


$$\begin{aligned} \mathcal{F}, e, u &\vDash \Diamond p \\ \mathcal{F}, e, u &\vDash \Box p \\ \mathcal{F}, e &\vDash \Box p \Rightarrow \Diamond p \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{F}, e, u &\vDash \Diamond \neg p \\ \mathcal{F}, e, u &\vDash \Box \neg p \\ \mathcal{F}, e &\vDash \Box \neg p \Rightarrow \Diamond \neg p \end{aligned}$$

$$\mathcal{F} \vDash \Box p \Rightarrow \Diamond p$$

Un caso en apariencia paradójico





$$\begin{aligned} \mathcal{F}, e &\nvDash \Diamond p \\ \mathcal{F}, e &\vDash \Box p \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{F}, e &\nvDash \Diamond \neg p \\ \mathcal{F}, e &\vDash \Box \neg p \end{aligned}$$

para toda fórmula α, $\mathcal{F} \vDash \Box\alpha$ pero $\mathcal{F} \nvDash \Diamond\alpha$

Propiedades de la relación de accesibilidad

En los ejemplos anteriores se pudo apreciar que la validez de una fórmula depende de propiedades abstractas de la relación de accesibilidad. He aquí una lista de propiedades interesantes:

P_1	$\forall u. \exists v. u \to v$	serial
P_2	$\forall u. u \to u$	reflexiva
P_3	$\forall u, v. u \to v \Rightarrow v \to u$	simétrica
P_4	$\forall u, v, w. u \to v \wedge v \to w \Rightarrow u \to w$	transitiva
P_5	$\forall u, v, w. u \to v \wedge u \to w \Rightarrow v \to w$	euclidiana
P_6	$\forall u, v, w. u \to v \wedge u \to w \Rightarrow v = w$	funcional parcial
P_7	$\forall u. \exists! v. u \to v$	funcional
P_8	$\forall u, v. u \to v \Rightarrow (\exists w. u \to w \wedge w \to v)$	densa débil
P_9	$\forall u, v, w. u \to v \wedge u \to w \Rightarrow v \to w \vee w \to v \vee v = w$	conexa débil
P_{10}	$\forall u, v, w. u \to v \wedge u \to w \Rightarrow (\exists z. v \to z \wedge w \to z)$	dirigida débil

Esquemas modales

Las propiedades anteriores corresponden a los siguientes esquemas de fórmulas válidas:

S_1	$\Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$	$D(\alpha)$
S_2	$\Box\alpha \Rightarrow \alpha$	$T(\alpha)$
S_3	$\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$	$B(\alpha)$
S_4	$\Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha$	$4(\alpha)$
S_5	$\Diamond\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$	$5(\alpha)$
S_6	$\Diamond\alpha \Rightarrow \Box\alpha$	
S_7	$\Diamond\alpha \Leftrightarrow \Box\alpha$	$Q(\alpha)$
S_8	$\Box\Box\alpha \Rightarrow \Box\alpha$	$R(\alpha)$
S_9	$\Box(\alpha \wedge \Box\alpha \Rightarrow \beta) \vee \Box(\beta \wedge \Box\beta \Rightarrow \alpha)$	
S_{10}	$\Diamond\Box\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$	$G(\alpha)$

Equiv. entre propiedades de $\mathscr{R}$ y esquemas modales I

Teorema 3.1 (Accesibilidad y axiomas modales)

Sea $\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle$. Entonces

$$\mathscr{F} \models S_i \qquad \textit{sii} \qquad \mathscr{R} \textit{ satisface } P_i.$$

Demostración. Se procede caso por caso. Ejemplo:

$$\mathscr{F} \models S_1 \qquad \text{sii} \qquad \mathscr{R} \text{ satisface } P_1.$$

Sea $\mathscr{F} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R} \rangle$, con $\mathscr{R}$ serial. Ahora debemos demostrar que

$$\mathscr{F} \models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha.$$

Lo haremos por contradicción. Supongamos que $\mathscr{F} \not\models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$.

Equiv. entre propiedades de $\mathscr{R}$ y esquemas modales II

Esto pasa sii existe una evaluación e tal que

$$\mathscr{F}, e \not\models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha,$$

lo cual ocurre sii existe un $w \in \mathscr{W}$ tal que

$$\mathscr{F}, e, w \not\models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha,$$

que a su vez pasa sii

$$(1)\ \mathscr{F}, e, w \models \Box\alpha \qquad \text{y} \qquad (2)\ \mathscr{F}, e, w \not\models \Diamond\alpha,$$

(1) por definición implica que para todo v si $w \to v$ entonces

$$\mathscr{F}, e, v \models \alpha,$$

Equiv. entre propiedades de $\mathscr{R}$ y esquemas modales III

y (2) por definición implica que existe v tal que $w \to v$ y

$$\mathscr{F}, e, v \not\models \alpha,$$

los cuales se contradicen claramente, por lo que $\mathscr{F} \models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$.

En cuanto a la inversa: supongamos que

$$\mathscr{F} \models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$$

pero $\mathscr{R}$ no es serial (por reducción al absurdo). Por definición, existe $w \in \mathscr{W}$ tal que para toda $v \in \mathscr{W}$ se tiene que

$$w \not\to v.$$

Equiv. entre propiedades de $\mathscr{R}$ y esquemas modales IV

Entonces, como lo muestran los ejemplos de la lámina 10, para cualquier evaluación e

$$\mathscr{F}, e, w \models \Box\alpha \qquad \text{y} \qquad \mathscr{F}, e, w \not\models \Diamond\alpha$$

lo cual contradice $\mathscr{F} \models \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$. Por tanto, $\mathscr{R}$ tiene que ser serial. □

Reglas de inferencia para todos los sistemas

$MP \quad \dfrac{p \Rightarrow q, p}{q}$

$K \quad \Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$

$N \quad \dfrac{p}{\Box p}$

$EN \quad \dfrac{p \Rightarrow q}{\Box p \Rightarrow \Box q} \qquad \dfrac{p \Rightarrow q}{\Diamond p \Rightarrow \Diamond q}$

Se toma como primitiva la definición de $\Diamond$

$$\Diamond p \equiv_{def} \neg\Box\neg p.$$

La regla *EN* no es primitiva y se deriva de *K* y *N*:

1	$p \Rightarrow q$	Premisa
2	$\Box(p \Rightarrow q)$	*N*
3	$\Box(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box p \Rightarrow \Box q)$	*K*
4	$\Box p \Rightarrow \Box q$	*MP* 3, 2

1	$p \Rightarrow q$	Premisa
2	$\neg q \Rightarrow \neg p$	Teorema
3	$\Box\neg q \Rightarrow \Box\neg p$	Teorema anterior
4	$\neg\Box\neg p \Rightarrow \neg\Box\neg q$	Teorema
5	$\Diamond p \Rightarrow \Diamond q$	Def. de $\Diamond$

Una advertencia sobre deducción natural

- La deducción natural presenta riesgos en combinación con la lógica modal.
- Por ejemplo, con la regla $I \Rightarrow$ es posible derivar la falacia

$$p \Rightarrow \Box p.$$

- Por otro lado, todos los teoremas del cálculo de proposiciones son válidos en lógica modal.
- Por esta razón, en las demostraciones anteriores y en todas las que siguen se "importarán" libremente teoremas del cálculo de proposiciones.
- No obstante, existen sistemas que combinan deducción natural con lógica modal sin peligro, pero rebasan el alcance de este curso.

Sistemas axiomáticos particulares

Todos los sistemas axiomáticos para lógica modal incluyen el axioma *K* y las reglas *MP* y *N*. Otros sistemas son:

$$KD \qquad KT \qquad KB \qquad K4 \qquad K5$$

Los siguientes sistemas reciben un nombre particular

$$S4 = KT4 \qquad S5 = KT5.$$

En adelante, $\vdash_S$ designará la relación de deducibilidad en un sistema S. Algunos sistemas son "subsistemas de otros", es decir, sus teoremas son teoremas de sistemas más poderosos. Por ejemplo

$$\vdash_{KD5} \alpha \quad \text{implica} \quad \vdash_{S5} \alpha \qquad \forall\alpha$$

Ejemplo de demostración

El sistema T incluye al sistema D, es decir

$$\vdash_T \Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha.$$

Demostración:

1	$\Box\neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha$	Instancia de T
2	$\alpha \Rightarrow \neg\Box\neg\alpha$	Teorema $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$
3	$\Box\alpha \Rightarrow \alpha$	Instancia de T
4	$\Box\alpha \Rightarrow \neg\Box\neg\alpha$	Teorema $\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$
5	$\Box\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$	Def. de $\Diamond$

Propiedades metalógicas de la lógica modal

- Igual que en el cálculo de proposiciones y de predicados, hay teoremas de corrección y completitud para la lógica modal.
- En este curso demostraremos solamente la corrección en sentido restringido.
- La consistencia se sigue de la corrección y de la semántica del lenguaje modal.
- La completitud quedará para un curso futuro.
- La lógica modal es decidible, tanto semántica como inferencialmente. La demostración también será tema de otro curso.

Corrección de la lógica modal I

Teorema 3.2

La lógica modal con MP, N y el axioma K es correcta, es decir

$$\vdash \alpha \quad \text{implica que} \quad \vDash \alpha.$$

Demostración. Veremos primero que N y K son válidas en todos los marcos posibles. Usaremos inducción en demostraciones.

Supongamos que hemos demostrado que $\vdash \alpha$ y a partir de ahí inferimos $\vdash \Box\alpha$. Por hipótesis inductiva,

$$\vDash \alpha,$$

y, por definición, en todos $\mathscr{F}$, e y w

$$\mathscr{F}, e, w \vDash \alpha$$

Corrección de la lógica modal II

Sea $w \to v$. Por la hipótesis anterior,

$$\mathscr{F}, e, v \vDash \alpha$$

y por definición de $\vDash$ con $\Box$

$$\mathscr{F}, e, w \vDash \Box\alpha.$$

Para K utilizaremos reducción al absurdo. Supongamos que existen $\mathscr{F}$, e y w tales que

$$\mathscr{F}, e, w \nvDash \Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta), \tag{1}$$

es decir

$$\mathscr{F}, e, w \vDash \Box(\alpha \Rightarrow \beta) \tag{2}$$

$$\text{pero} \quad \mathscr{F}, e, w \nvDash \Box\alpha \Rightarrow \Box\beta, \tag{3}$$

Corrección de la lógica modal III

y (3) a su vez significa que

$$\mathcal{F}, e, w \vDash \Box\alpha \quad (4)$$

$$\text{pero} \quad \mathcal{F}, e, w \nvDash \Box\beta. \quad (5)$$

Por definición de $\vDash$, (5) significa que existe v tal que $w \to v$ y

$$\mathcal{F}, e, v \nvDash \beta. \quad (6)$$

Pero por definición de $\vDash$ y por (2) y (4)

$$\mathcal{F}, e, v \vDash \alpha \Rightarrow \beta \quad (7)$$

$$\mathcal{F}, e, v \vDash \alpha, \quad (8)$$

Corrección de la lógica modal IV

y por definición de $\vDash$ con $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}, e, v \vDash \beta$$

lo que contradice (6). Por tanto

$$\mathcal{F}, e, w \vDash K$$

y como se trata de un marco, una evaluación y un mundo arbitrario

$$\vDash K.$$

Las tautologías del cálculo de proposiciones son válidas en todos los marcos posibles y no afectan la corrección de K y N.
La regla MP es la regla de $E \Rightarrow$ de la deducción natural, cuya corrección ya se abordó en el pasado. $\square$

Corrección y completitud en sistemas particulares

La corrección de los sistemas particulares de lógica modal se sigue del teorema 3.1 y de la corrección de la lógica modal general.