LÓGICA I
CÁLCULO DE PREDICADOS

Francisco Hernández Quiroz

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
E-mail: fhq@ciencias.unam.mx
Página Web: www.matematicas.unam.mx/fhq

Posgrado en Filosofía de la Ciencia

Un ejemplo clásico

1. Todos los mamíferos son vertebrados.
2. El elefante es un mamífero.
3. Por tanto, el elefante es vertebrado.

Si formalizáramos el argumento anterior en términos del cálculo de proposiciones tendríamos:

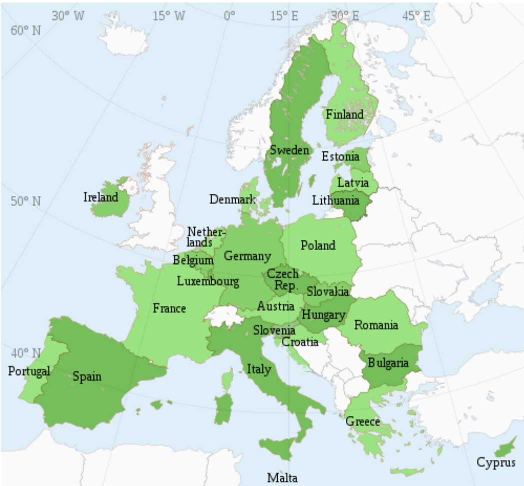
1. p.
2. q.
3. $p, q \models r$

Claramente no es un argumento lógicamente válido. Pero nuestra intuición nos dice que debería serlo.
Su validez reside en las relaciones entre distintas clases (vertebrados, mamíferos, elefantes) y estas relaciones no se pueden expresar en el cálculo de proposiciones.

¿Qué hace falta?

- Necesitamos un lenguaje que nos permita analizar la estructura de las proposiciones.
- En ese lenguaje debemos poder referirnos a objetos, a sus propiedades y a las relaciones de los objetos. Así, podríamos hacer afirmaciones sobre un objeto particular, o sobre algunos objetos o sobre todos ellos.
- Finalmente, el lenguaje debe permitirnos razonar sobre los objetos y sus relaciones más allá de lo que nos permiten las conectivas lógicas proposicionales.
- En las siguientes láminas presentaremos el lenguaje del *cálculo de predicados de primer orden*, que nos permitará formalizar las nociones anteriores.
- Pero antes presentaremos un ejemplo más de objetos y sus relaciones.

La Unión Europea en un mapa



La Unión Europea en una tabla

País	Área en km^2	País	Área en km^2
Alemania	357,386	Hungría	93,030
Austria	83,855	Irlanda	70,273
Bélgica	30,528	Italia	301,338
Bulgaria	110,994	Letonia	64,589
Croacia	56,594	Lituania	65,200
Chipre	9,251	Luxemburgo	2,586.4
Dinamarca	43,075	Malta	316
Eslovaquia	49,035	Países Bajos	41,543
Eslovenia	20,273	Polonia	312,685
España	504,030	Portugal	92,212
Estonia	45,227	República Checa	78,866
Finlandia	338,424	Rumania	238,391
Francia	632,833	Suecia	449,964
Grecia	131,990		

Algunas observaciones

- Francia tiene como vecinos a Alemania, Bélgica, España, Luxemburgo e Italia.
- Su vecino de mayor área es España.
- España tiene como vecinos a Portugal y Francia, pero su vecino de mayor área es Francia.
- La mayoría de los países tiene uno o más vecinos, pero sólo uno es el de mayor área, por supuesto.
- Malta es el país más pequeño de la Unión Europea.
- Francia es el país más grande.
- Alemania es vecina de Polonia y Austria.
- El vecino común de mayor área de Austria y Polonia es Alemania.

Estas afirmaciones se refieren a relaciones entre países de la Unión Europea. No se podrían expresar en el cálculo de proposiciones.

Términos I

- Los términos se refieren a individuos de nuestro universo.
- Pueden ser de tres tipos: constantes, variables y términos que son el resultado de aplicar funciones a otros términos.
- En términos formales, tenemos dos conjuntos básicos:
  - Las constantes:
    $$\mathrm{C} = \{c, c_0, c_1, \dots\}$$
  - y las variables:
    $$\mathrm{Var} = \{x, y, z, x_0, y_0, z_0, \dots\}$$

Términos II

El conjunto de términos se define inductivamente:

1. Las constantes son términos.
2. Las variables son términos.
3. Si $t_1, \dots, t_n$ son términos, entonces $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$ también es un término.
   n representa el número de argumentos de una función y k un subíndice que la distingue de otras funciones.
4. Los únicos términos son los que se pueden crear con un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Al conjunto de términos lo denotaremos como T.

Fórmulas I

Las fórmulas del cálculo de predicados nos permiten hacer afirmaciones sobre los términos. Las más simples son las *atómicas*:

$$\mathrm{Pred}_A = \{P^n_k(t_1, \dots, t_n) \mid 1 \leq n, k \qquad t_1, \dots, t_n \in \mathrm{T}\}.$$

De nuevo, n representa el número de argumentos de un predicado y k un subíndce que lo distingue de otros.

Y el conjunto de fórmulas se define inductivamente:

1. Las fórmulas atómicas (Pred_A) son fórmulas.
2. Si α y β son fórmulas, también lo son

$$\neg\alpha \quad (\alpha \vee \beta) \quad (\alpha \wedge \beta) \quad (\alpha \Rightarrow \beta) \quad (\alpha \Leftrightarrow \beta).$$

Fórmulas II

3. Si α es una fórmula, también lo son

$$(\forall x.\, \alpha) \qquad (\exists x.\, \alpha).$$

4. Las únicas fórmulas son las que se pueden crear con un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Llameremos Pred al conjunto de fórmulas del cálculo de predicados.

Variables libres y ligadas

Una variable en una fórmula puede aparecer libre o ligada. Definiremos dos funciones para calcular los conjuntos de variables libres y ligadas:

$$F : \mathrm{Pred} \to \mathscr{P}(\mathrm{Var}) \quad \text{y} \quad B : \mathrm{Pred} \to \mathscr{P}(\mathrm{Var})$$

donde Pred es el conjunto de fórmulas del cálculo de predicados.

$$\begin{array}{llll}
F(P^n_k(t_1, \dots, t_n)) & = \{x \mid x \in t_i\} & B(P^n_k(t_1, \dots, t_n)) & = \emptyset \\
F(\neg\alpha) & = F(\alpha) & B(\neg\alpha) & = B(\alpha) \\
F(\alpha \vee \beta) & = F(\alpha) \cup F(\beta) & B(\alpha \vee \beta) & = B(\alpha) \cup B(\beta) \\
\dots & & & \\
F(\forall x.\, \alpha) & = F(\alpha) - \{x\} & B(\forall x.\, \alpha) & = B(\alpha) \cup \{x\} \\
F(\exists x.\, \alpha) & = F(\alpha) - \{x\} & B(\exists x.\, \alpha) & = B(\alpha) \cup \{x\}
\end{array}$$

Fórmulas cerradas

Definición 2.1

*Una fórmula $\alpha \in \mathrm{Pred}$ es **cerrada** sii $F(\alpha) = \emptyset$.*
*Si α tiene las variables libres $x_1, \dots, x_n$, entonces su **cerradura** es la fórmula $\forall x_1. \forall x_n.\, \alpha$.*

Las fórmulas cerradas tendrán un papel central más adelante.

Sustitución en términos

Las funciones anteriores servirán para poder sustituir variables libres por términos en fórmulas arbitrarias de Pred.
Comenzamos con las sustituciones en términos:

1. $x_{[x:=t]} = t$
2. $y_{[x:=t]} = y$ si $x \neq y$
3. $c_{[x:=t]} = c$ si $c \in C$
4. $f^n_m(t_1, \ldots, t_n)_{[x:=t]} = f^n_m(t_{1[x:=t]}, \ldots, t_{n[x:=t]})$

Sustitución en fórmulas

Ahora veremos las sustituciones en fórmulas:

1. $P^n_m(t_1, \ldots, t_n)_{[x:=t]} = P^n_m(t_{1[x:=t]}, \ldots, t_{n[x:=t]})$
2. (a) $(\neg\alpha)_{[x:=t]} = \neg(\alpha_{[x:=t]})$
   (b) $(\alpha \vee \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \vee \beta_{[x:=t]})$
   (c) $(\alpha \wedge \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \wedge \beta_{[x:=t]})$
   (d) $(\alpha \Rightarrow \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \Rightarrow \beta_{[x:=t]})$
   (e) $(\alpha \Leftrightarrow \beta)_{[x:=t]} = (\alpha_{[x:=t]} \Leftrightarrow \beta_{[x:=t]})$
3. (a) $(\forall x.\, \alpha)_{[x:=t]} = (\forall x.\, \alpha)$
   (b) $(\forall y.\, \alpha)_{[x:=t]} = (\forall y.\, \alpha_{[x:=t]})$ si $x \notin F(\alpha)$ o $y \notin t$
   (c) $(\forall y.\, \alpha)_{[x:=t]} = \forall z.\, (\alpha_{[y:=z]})_{[x:=t]}$ si $x \in F(\alpha)$ y $y \in t$ (z una variable nueva)

(d), (e) y (f) corresponden al cuantificador existencial $\exists$ y son análogas.

De nuevo el mapa de la Unión Europea I

Ahora se pueden expresar formalmente algunas de las relaciones del ejemplo del mapa de la Unión Europea:

- Los países x y y son vecinos
$$P^2_1(x, y).$$
- El vecino de mayor área del país x
$$f^1_1(x).$$
- El vecino común de mayor área de los países x y y
$$f^2_1(x, y).$$

De nuevo el mapa de la Unión Europea II

- Si c, c_1, c_2 representan a España, Portugal y Francia, entonces
$$P^2_1(c, c_1) \wedge P^2_1(c, c_2),$$
pero
$$f^1_1(c) = c_2.$$
- Si c_3 es Malta y P^1_1 es ser el país más pequeño de la Unión Europea, entonces
$$P^1_1(c_3).$$
- Y si P^1_2 es ser el país más grande, entonces
$$P^1_2(c_2).$$

De nuevo el mapa de la Unión Europea III

- Sean c_4, c_5, c_6 Alemania, Polonia y Austria, respectivamente. Entonces

$$P_1^2(c_4, c_5) \land P_1^2(c_4, c_6) \qquad c_4 = f_1^2(c_5, c_6).$$

Pero también podemos decir cosas más generales:

- Si un país es el más grande de Europa, entonces es el vecino de mayor tamaño de entre sus vecinos

$$\forall x. \forall y. P_2^1(x) \land P_1^2(x, y) \Rightarrow x = f_1^1(y).$$

- La vecindad entre países no es transitiva, es decir "tus vecinos no necesariamento son mis vecinos"

$$\exists x. \exists y. \exists z. P_1^2(x, y) \land P_1^2(y, z) \land \neg P_1^2(x, z).$$

¿Qué diferencia hay entre relaciones y funciones? I

- Una símbolo de predicado P_k^n nos habla de algo que relaciona a n objetos en nuestro universo.
- Una función nos habla de una correspondencia de uno o varios objetos con otro objeto *único*.
- Esta correspondencia puede verse también como una relación entre objetos, i.e., las funciones se pueden ver como relaciones.
- Por ejemplo, la sucesión

$$1 = 1, 2 = 4, 3 = 9, 4 = 16 \ldots$$

se puede representar de dos maneras

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$$
$$(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), \ldots$$

¿Qué diferencia hay entre relaciones y funciones? II

En nuestro formalismo, la primera corresponde a f_k^1 y la segunda a P_k^2.
Y podemos elegir la que más nos convenga.

- Pero no toda relación se puede representar con una función. Ser vecino es un caso. ¿Cuál sería el resultado de aplicar la función ser vecino a España? ¿Francia o Portugal?

Otros ejemplos de formalización de nociones básicas

- Ser el padre o la madre biológicos de alguien (f_1^1 y f_2^1 son funciones que denotan padre y madre):

$$f_1^1(y) \qquad f_2^1(y).$$

- La relación de hermano (el predicado P_1^2 relaciona hermanos):

$$P_1^2(x, y).$$

Nótese que es una relación y no una función (¿por qué?).

- Un par de axiomas sobre hermanos:

$$\forall x. \neg P_1^2(x, x) \qquad \forall x. \forall y. P_1^2(x, y) \Rightarrow f_1^1(x) = f_1^1(y) \land f_2^1(x) = f_2^1(y)$$

es decir, nadie es su propio hermano y los hermanos tienen los mismos padres (¿cómo formalizarías "ser medio hermano"?).

Semántica

La semántica de Pred se basa en el concepto de *interpretación*. Una interpretación I consiste en un conjunto U al que llamaremos el *universo* de interpretación y tres funciones

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathrm{Var} \cup \mathrm{C} \rightarrow U \\ \Phi &: \{f_k^n\} \rightarrow \{\varphi : U^n \rightarrow U\} \\ \Pi &: \{P_k^n\} \rightarrow \{R \subseteq U^n\} \end{aligned}$$

Las funciones Ψ y Φ se combinan para la interpretación de términos más complejos:

$$\hat{\Psi}(f_k^n(t_1, \ldots, t_n)) = \Phi(f_k^n)(\hat{\Psi}(t_1), \ldots, \hat{\Psi}(t_n)).$$

Satisfacción I

La *satisfacción* es una relación entre interpretaciones y fórmulas de Pred.
Sea $\alpha \in$ Pred y sea $I = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$ una interpretación. Diremos que I *satisface* α si se cumplen las siguientes condiciones definidas inductivamente en la estructura de α:

1. $\alpha = P_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ y $(\Psi(t_1), \ldots, \Psi(t_n)) \in \Pi(P_k^n)$;
2. $\alpha = \neg\beta$ e I no satisface β;
3. $\alpha = \beta \vee \gamma$ e I satisface β o satisface γ;

   ...
4. $\alpha = (\forall x. \beta)$ y para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= \Psi(c) \quad \forall c \in \mathrm{C} \\ \Psi'(y) &= \Psi(y) \quad \forall y \in \mathrm{Var}.\, x \neq y \end{aligned}$$

   I' satisface β.

Satisfacción II

5. $\alpha = (\exists x. \beta)$ y existe $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= \Psi(c) \quad \forall c \in \mathrm{C} \\ \Psi'(y) &= \Psi(y) \quad \forall y \in \mathrm{Var}.\, x \neq y \end{aligned}$$

   tal que I' satisface β.

Verdad y validez I

- La satisfacción es un concepto más débil que el de *verdad*. Éste último se define en función de la satisfacción.
- Sea α una fórmula y sea I una interpretación. Diremos que α *es verdadera en* I sii para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\Psi'(c) = \Psi(c) \qquad \forall c \in \mathrm{C}$$

  se tiene que I' satisface α. En ese caso, escribiremos

$$\models_I \alpha.$$

- Una fórmula α es *falsa* sii $\neg\alpha$ es verdadera.
- Nótese que con estas definiciones se pierde la dualidad entre verdad y falsedad: si una fórmula no es verdadera, no necesariamente es falsa.

Verdad y validez II

- También se sigue de estas definiciones que una fórmula cerrada o bien es verdadera o bien es falsa.
- El concepto de *validez* es análogo al de tautología en el cálculo de proposiciones: α es *válida* sii para toda interpretación I se tiene que

$$\models_I \alpha.$$

Ejemplos

Considérense las fórmulas

1. $P_1^2(x, c)$
2. $\forall x. P_1^2(x, c)$
3. $\forall x. P_1^2(c, x)$
4. $P_1^1(x) \vee \neg P_1^1(x)$

y la interpretación $I_{\mathbb{N}} = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$, donde

$$\Psi : \mathrm{Var} \cup \mathrm{C} \to \mathbb{N} \qquad \Phi : \{f_k^n\} \to \{\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}\} \qquad \Pi : \{P_k^n\} \to \{R \subseteq \mathbb{N}^n\}$$

y en especial

$$\Psi(x) = 0 \quad \Psi(c) = 0 \quad \Pi(P_1^2) = \leq \quad \Pi(P_1^1) = \{n \mid n \text{ es par}\}.$$

$I_{\mathbb{N}}$ satisface las fórmulas 1, 3 y 4, pero sólo las fórmulas 3 y 4 son verdaderas. Además, la fórmula 4 es válida, pues será verdadera para cualquier otra interpretación que se elija.

Modelos

Sea I una interpretación y sea Γ un conjunto de fórmulas. Diremos que I es un *modelo* de Γ sii

$$\models_I \gamma \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Consecuencia lógica

Definición 2.2

Consideremos las fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$. Diremos que

$$\beta \text{ es consecuencia lógica de } \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

sii para toda interpretación I

$$\text{si} \quad \models_I \alpha_1, \ldots, \models_I \alpha_n \qquad \text{entonces} \quad \models_I \beta.$$

En ese caso, escribiremos

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta.$$

Obsérvese que esta definición es el equivalente de *argumento válido* para el cálculo de proposiciones.

Indecidibilidad semántica

Teorema 2.3

No existe un algoritmo que nos permita determinar, para toda α arbitraria, si $\models \alpha$ o $\not\models \alpha$.

- El problema de determinar la validez de una fórmula del cálculo de predicados de primer orden se conoce como *Entscheidungsproblem*.
- Fue planteado por primera vez por David Hilbert y sus alumnos.
- Alonzo Church demostró por primera vez este resultado negativo.
- Poco después Alan Turing demostró la equivalencia entre este problema y el de la detención de las máquinas de Turing (*halting problem*).

Sistemas de demostración

Los sistemas de demostración del cálculo de predicados son una extensión de las ideas vistas en cálculo de proposiciones:

- Se tiene un conjunto (finito) de reglas de inferencia.
- Una demostración es una sucesión de fórmulas de las cuales la última es la conclusión y las anteriores son o bien premisas o bien aplicaciones de las reglas de inferencia (con sustitución) a partir de fórmulas ya demostradas.
- En una demostración es posible utilizar (instancias de) teoremas ya demostrados.

Deducción natural

$$I\forall \quad \frac{\boxed{\begin{array}{lr} & I\forall\, n \\ \vdots & \\ \alpha_{[x:=n]} & \end{array}}}{\forall x.\,\alpha} \qquad E\forall \quad \frac{\forall x.\,\alpha}{\alpha_{[x:=t]}}$$

$$I\exists \quad \frac{\alpha_{[x:=t]}}{\exists x.\,\alpha} \qquad E\exists \quad \frac{\exists x.\,\alpha \quad \boxed{\begin{array}{lr} \alpha_{[x:=n]} & E\exists\, n \\ \vdots & \\ \beta & \end{array}}}{\beta}$$

La variable especial n en $I\forall$ y $E\exists$ tiene que ser *nueva*, i.e. que no se haya usado previamente en la demostración y que no aparezca en β.

Ejemplos. Regla $E\forall$

Demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x), P^1_1(c) \vdash P^1_2(c)$$

1	$\forall x.\, P^1_1(x) \Rightarrow P^1_2(x)$	Prem
2	$P^1_1(c)$	Prem
3	$P^1_1(c) \Rightarrow P^1_2(c)$	$E\forall$ 1
4	$P^1_2(c)$	$E\Rightarrow$ 3, 2

Ejemplos. Regla $I\exists$

Demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x), P_1^1(c) \vdash \exists x.\, P_2^1(x)$$

1	$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)$	Prem
2	$P_1^1(c)$	Prem
3	$P_1^1(c) \Rightarrow P_2^1(c)$	$E\forall$ 1
4	$P_2^1(c)$	$E\Rightarrow$ 3, 2
5	$\exists x.\, P_2^1(x)$	$I\exists$ 4

Ejemplos. Regla $I\forall$

Demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x), \forall x.\, P_2^1(x) \Rightarrow P_3^1(x) \vdash \forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_3^1(x)$$

1	$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)$	Prem
2	$\forall x.\, P_2^1(x) \Rightarrow P_3^1(x)$	Prem
	$I\forall n$	
3	$P_1^1(n) \Rightarrow P_2^1(n)$	$E\forall$ 1
4	$P_2^1(n) \Rightarrow P_3^1(n)$	$E\forall$ 2
5	$P_1^1(n) \Rightarrow P_3^1(n)$	$Teo\ \alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$
6	$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_3^1(x)$	$I\forall$

Ejemplos. Regla $E\exists$

Finalmente, demostraremos el teorema

$$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x), \exists x.\, P_1^1(x) \vdash \exists x.\, P_2^1(x)$$

1	$\forall x.\, P_1^1(x) \Rightarrow P_2^1(x)$	Prem
2	$\exists x.\, P_1^1(x)$	Prem
	$E\exists n$	
3	$P_1^1(n)$	Hip
4	$P_1^1(n) \Rightarrow P_2^1(n)$	$E\forall$ 1
5	$P_2^1(n)$	$E\Rightarrow$ 4, 3
6	$\exists x.\, P_2^1(x)$	$I\exists$ 5
7	$\exists x.\, P_2^1(x)$	$E\exists$ 2

Ejemplos. $(\forall x.\, \alpha) \Leftrightarrow (\neg\exists x.\, \neg\alpha)$. Parte I

Éste no es un teorema, sino una serie de teoremas, uno por cada α posible.

1	$\forall x.\, \alpha$	Hipótesis
2	$\exists x.\, \neg\alpha$	Hipótesis
	$E\exists n$	
3	$\neg\alpha_{[x:=n]}$	Hipótesis
4	$\alpha_{[x:=n]}$	$E\forall$ 1
5	$\perp$	$I\perp$ 3, 4
6	$\perp$	$E\exists$ 2
7	$\neg\exists x.\, \neg\alpha$	$I\neg$ 2
8	$(\forall x.\, \alpha) \Rightarrow (\neg\exists x.\, \neg\alpha)$	$I\Rightarrow$

Ejemplos. $(\forall x.\,\alpha) \Leftrightarrow (\neg\exists x.\,\neg\alpha)$. Parte II

9	$\neg\exists x.\,\neg\alpha$	Hipótesis
	$I\forall m$	
10	$\neg\alpha_{[x:=m]}$	Hipótesis
11	$\exists x.\,\neg\alpha$	$I\exists$ 10
12	$\bot$	$I\bot$ 9, 11
13	$\alpha_{[x:=m]}$	$E\neg$ 10
14	$\forall x.\,\alpha$	$I\forall$ 13
15	$(\neg\exists x.\,\neg\alpha) \Rightarrow (\forall x.\,\alpha)$	$I\Rightarrow$
16	$(\forall x.\,\alpha) \Leftrightarrow (\neg\exists x.\,\neg\alpha)$	$I\Leftrightarrow$ 8, 15

Ejemplos. Cambio de orden de variables

Para el teorema $\forall x.\forall y.\,\alpha \vdash_N \forall y.\forall x.\,\alpha$ utilizaremos una propiedad de las sustituciones. Si $x \notin t_1$ y $y \notin t_2$ entonces

$$(\alpha_{[x:=t_2]})_{[y:=t_1]} = (\alpha_{[y:=t_1]})_{[x:=t_2]}.$$

1	$\forall x.\forall y.\,\alpha$	Premisa
	$I\forall n$	
	$I\forall m$	
2	$\forall y.\,\alpha_{[x:=m]}$	$E\forall$ 1
3	$(\alpha_{[x:=m]})_{[y:=n]}$	$E\forall$ 2
4	$(\alpha_{[y:=n]})_{[x:=m]}$	Propiedad especial
5	$\forall x.\,\alpha_{[y:=n]}$	$I\forall$ 4
6	$\forall y \forall x.\,\alpha$	$I\forall$ 5

Ejemplos. $(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$. Parte I

1	$\forall x.\,\alpha \wedge \beta$	Hipótesis
	$I\forall m$	
2	$(\alpha \wedge \beta)_{[x:=m]}$	$E\forall$ 1
3	$\alpha_{[x:=m]} \wedge \beta_{[x:=m]}$	Reglas de sustitución
4	$\alpha_{[x:=m]}$	$E\wedge$ 3
5	$\forall x.\,\alpha$	$I\forall$ 5
	$I\forall n$	
6	$(\alpha \wedge \beta)_{[x:=n]}$	$E\forall$ 1
7	$\alpha_{[x:=n]} \wedge \beta_{[x:=n]}$	Reglas de sustitución
8	$\beta_{[x:=n]}$	$E\wedge$ 7
9	$\forall x.\,\beta$	$I\forall$ 8
10	$(\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	$I\wedge$ 5, 9
11	$(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	$I\Rightarrow$

Ejemplos. $(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$. Parte II

12	$(\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	Hipótesis
	$I\forall k$	
13	$\forall x.\,\alpha$	$E\wedge$ 12
14	$\forall x.\,\beta$	$E\wedge$ 12
15	$\alpha_{[x:=k]}$	$E\forall$ 13
16	$\beta_{[x:=k]}$	$E\forall$ 14
17	$\alpha_{[x:=k]} \wedge \beta_{[x:=k]}$	$I\wedge$ 15, 16
18	$(\alpha \wedge \beta)_{[x:=k]}$	Reglas de sustitución
19	$\forall x.\,\alpha \wedge \beta$	$I\forall$ 18
20	$(\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta) \Rightarrow (\forall x.\,\alpha \wedge \beta)$	$I\Rightarrow$
21	$(\forall x.\,\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$	$I\Leftrightarrow$ 11, 20

Aclaraciones sobre los nombres $n, m, \ldots$ en $E\,\exists$ e $I\,\forall$

- Los símbolos utilizados en las reglas $E\,\exists$ e $I\,\forall$ son especiales.
- No forman parte de nuestro lenguaje original, sino que sólo aparecen en el curso de las demostraciones.
- En particular, difieren de las variables en que no se pueden cuantificar.
- En una interpretación, se asemejan a las constantes porque las variantes de una interpretación que utilizamos para definir verdad o satisfacción no pueden alterar su significado.
- Por estas razones, en algunos libros se les llaman *nombres ambiguos*.
- Recuérdese que al introducir uno de estos nombres, debe usarse siempre un símbolo totalmente nuevo.

Propiedades de los sistemas de demostración

Definición 2.4

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Un sistema de demostración $\vdash$ es:

- *correcto sii $\vdash \beta$ implica que $\vDash \beta$;*
- *correcto en sentido amplio sii*
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta \text{ implica } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta;$$
- *completo sii $\vDash \beta$ implica que $\vdash \beta$;*
- *completo en sentido amplio sii*
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta \text{ implica } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta;$$
- *consistente sii no existe una fórmula γ tal que $\vdash \gamma$ y $\vdash \neg\gamma$;*
- *decidible sii existe un "procedimiento efectivo" para determinar, dada una fórmula arbitraria γ, si $\vdash \gamma$ o $\nvdash \gamma$.*

Corrección de $\vdash_N$

Igual que en el cálculo de proposiciones, es posible demostrar corrección en sentido amplio de manera directa.

Teorema 2.5

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β fórmulas. Entonces

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta \qquad \text{implica que} \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \beta.$$

Se utilizará también el método de inducción en demostraciones.

Demostración de corrección

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_N \beta$ significa que tenemos una demostración

$$\begin{array}{cc} 1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots \\ k & \gamma_k \end{array}$$

donde $\gamma_k = \beta$. Demostraremos que para toda $i \leq k$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \gamma_i.$$

Nuevamente, se tienen dos casos: (a) cuando $\gamma_i \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y (b) cuando no es así.
El caso (a) es trivial y el caso (b) se demostrará por inducción.
Como en el caso del cálculo de proposiciones, cada una de las reglas debe preservar la corrección.

Demostración de corrección. Regla $E\forall$ I

En este caso, la demostración se ve así:

$$\begin{array}{lll} 1 & \gamma_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ j & \forall x.\,\varphi & \\ \vdots & \vdots & \\ i & \varphi_{[x:=t]} & E\forall\, j \end{array}$$

Por hipótesis inductiva

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \forall x.\,\varphi \tag{1}$$

Y se tiene que demostrar que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vDash \varphi_{[x:=t]}. \tag{2}$$

Demostración de corrección. Regla $E\forall$ II

Por definición, (1) vale sii para toda $I = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$ se tiene que

$$\vDash_I \alpha_1, \ldots, \alpha_n \quad \text{implica que} \quad \vDash_I \forall x.\,\varphi \tag{3}$$

También por definición, tenemos que para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$ (donde Ψ' difiere de Ψ cuando mucho en el valor de las variables)

$$I' \quad \text{satisface} \quad \forall x.\,\varphi \tag{4}$$

Y esto pasa sii para toda $I'' = \langle \Psi'', \Phi, \Pi \rangle$ (donde Ψ'' difiere de Ψ' cuando mucho en el valor de x)

$$I'' \quad \text{satisface} \quad \varphi \tag{5}$$

Por otra parte, gracias a (3) nuestra tarea se reduce a demostrar que

$$\vDash_I \varphi_{[x:=t]}.$$

Demostración de corrección. Regla $E\forall$ III

Por contradicción a (2), sea $I_0 = \langle \Psi_0, \Phi, \Pi \rangle$ tal que

$$\vDash_{I_0} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \quad \text{pero} \quad \nvDash_{I_0} \varphi_{[x:=t]} \tag{6}$$

Sea $\boldsymbol{I} = \langle \boldsymbol{\Psi}, \Phi, \Pi \rangle$ tal que

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \Psi_0(t).$$

Claramente, $\boldsymbol{I}$ no satisface φ, lo que contradice (5). Por tanto, I_0 no existe y (2) vale. □

Demostración de corrección. Regla $E\exists$ I

En este caso, nuestra demostración se ve así:

$$\begin{array}{ll|l|l} 1 & \gamma_1 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ j & \exists x.\,\varphi & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \cline{3-3} & & \hfill E\exists\, u & \\ m & & \varphi_{[x:=u]} & \text{Hipótesis} \\ \vdots & & \vdots & \\ i-1 & & \gamma_i & \\ \cline{3-3} i & \gamma_i & & \end{array}$$

Demostración de corrección. Regla $E\exists$ II

donde $u \notin \gamma_i$. Por hipótesis inductiva

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \exists x. \varphi \quad (7)$$
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi_{[x:=u]} \models \gamma_i \quad (8)$$

Y se tiene que demostrar que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \gamma_i. \quad (9)$$

Por definición, (7) y (8) nos dan

$$\models_I \alpha_1, \ldots, \alpha_n \quad \text{implica que} \quad \models_I \exists x. \varphi \quad (10)$$
$$\models_I \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi_{[x:=u]} \quad \text{implica que} \quad \gamma_i \quad (11)$$

Demostración de corrección. Regla $E\exists$ III

Con demostrar que

$$\models_I \exists x. \varphi \text{ implica que } \models_I \varphi_{[x:=u]} \quad (12)$$

y gracias a (10) y (11) demostraríamos (9).
Recuérdese que $\models_I \exists x. \varphi$ sii para toda $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$ (donde Ψ' difiere de Ψ cuando mucho en el valor de las variables)

$$I' \quad \text{satisface} \quad \exists x. \varphi. \quad (13)$$

Y esto pasa sii existe $I'' = \langle \Psi'', \Phi, \Pi \rangle$ (donde Ψ'' difiere de Ψ' cuando mucho en el valor de x) tal que

$$I'' \quad \text{satisface} \quad \varphi. \quad (14)$$

Demostración de corrección. Regla $E\exists$ IV

Sea $\boldsymbol{I} = \langle \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Pi} \rangle$, con $\boldsymbol{\Psi} = \Psi''$ excepto que

$$\boldsymbol{\Psi}(u) = \Psi''(x).$$

Claramente,

$$\boldsymbol{I} \quad \text{satisface} \quad \varphi_{[x:=u]}. \quad (15)$$

Pero, por la definición de $\boldsymbol{I}$

$$I'' \quad \text{también satisface} \quad \varphi_{[x:=u]}. \quad (16)$$

Por otro lado, como $x \notin F(\varphi_{[x:=u]})$ y Ψ'' difiere de Ψ' en, cuando mucho, x

$$I' \quad \text{también satisface} \quad \varphi_{[x:=u]}. \quad (17)$$

Demostración de corrección. Regla $E\exists$ V

Pero Ψ' difiere de Ψ cuando mucho en el valor de las variables, y por definición

$$\models_I \varphi_{[x:=u]}, \quad (18)$$

que es precisamente lo que queríamos demostrar. □

Las demás reglas quedan como ejercicio para el lector.

Completitud de $\vdash_N$

- La demostración completitud de $\vdash_N$ es considerablemente más compleja en el cálculo de predicados.
- Aquí se presentarán los lemas y definiciones necesarios en orden de aparición y no de dependencia lógica.
- Utilizaremos varios resultados que son de naturaleza semántica y no sintáctica, a diferencia del caso del cálculo de proposiciones.
- Gödel demostró la completitud por primera vez en 1930.
- Se presentará una versión basada en la de Henkin. Aunque en un orden de exposición distinto, es esencialmente la que presentan Mendelson en *Introduction to Mathematical Logic* (5a. ed.) y Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*.
- Barwise y Etchemendy en *Language, Proof and Logic* tienen una demostración alternativa, también basada en Henkin.

Teorema de completitud I

El objetivo central es el siguiente.

Teorema 2.6

Sea Γ un conjunto de fórmulas y β una fórmula.
Si $\Gamma \vDash \beta$ entonces $\Gamma \vdash_N \beta$.

Para demostrarlo, necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 2.7

Sea β una fórmula cerrada y sea Γ un conjunto de fórmulas tal que $\Gamma \nvdash_N \beta$. Entonces

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\}$$

es consistente.

Teorema de completitud II

Lema 2.8 (Henkin)

Todo conjunto consistente Γ tiene un modelo numerable.

Nota. *Un modelo numerable es un modelo cuyo universo tiene la cardinalidad de $\mathbb{N}$.*

Suponiendo que los dos lemas anteriores se han demostrado, podemos proceder con...

Demostración de 2.6. Supongamos, por contradicción, que $\Gamma \vDash \beta$ pero $\Gamma \nvdash_N \beta$. En ese caso, por 2.7, $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ es consistente y, por 2.8, $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ tiene un modelo I.
Pero entonces I es un modelo de Γ y como $\Gamma \vDash \beta$, entonces $\vDash_I \beta$, lo cual no es posible pues $\vDash_I \neg\beta$.
Por tanto, $\Gamma \vdash_N \beta$. □

Demostración del lema 2.7 I

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ es inconsistente, es decir, existe φ tal que

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash_N \varphi \qquad \text{y} \qquad \Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash_N \neg\varphi.$$

En cálculo de proposiciones, demostramos el teorema

$$\vdash_N \varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \beta)$$

y con dos aplicaciones de $E \Rightarrow$ tenemos que

$$\Gamma \cup \{\neg\beta\} \vdash_N \beta.$$

Entonces, por el teorema de la deducción

$$\Gamma \vdash_N \neg\beta \Rightarrow \beta$$

Demostración del lema 2.7 II

y por otro teorema del cálculo de proposiciones tenemos

$$\vdash_N (\neg\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta.$$

Otra aplicación de $E \Rightarrow$ nos da

$$\Gamma \vdash_N \beta$$

lo que contradice la hipótesis del lema.
Por tanto, $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ es consistente. □

Definición 2.9 (para demostrar el lema 2.8)

1. *Sea Γ un conjunto de fórmulas. Γ es **completo** sii para toda $\beta \in$ Pred cerrada*

$$\text{o bien} \quad \Gamma \vdash_N \beta \quad \text{o bien} \quad \Gamma \vdash_N \neg\beta.$$

2. *Sean Γ, Γ' dos conjuntos de fórmulas. Γ' es una **extensión** de Γ sii para toda $\beta \in$ Pred*

$$\text{si} \quad \Gamma \vdash_N \beta \quad \text{entonces} \quad \Gamma' \vdash_N \beta.$$

3. *Un término **cerrado** es un término sin variables.*
4. *Γ es un **conjunto con testimonios** sii para toda fórmula β (con x como única variable libre) existe un término cerrado t tal que*

$$\Gamma \vdash_N (\exists x.\beta) \Rightarrow \beta_{[x:=t]}.$$

Lemas para demostrar 2.8

Lema 2.10

Todo conjunto consistente de fórmulas Γ tiene una extensión consistente Γ' tal que Γ' es un conjunto con testimonios con un conjunto numerable de términos cerrados.

Lema 2.11 (Lindenbaum)

Si Γ es un conjunto consistente de fórmulas, entonces existe una extensión completa y consistente de Γ.

Lema 2.12

Sea Γ un conjunto con testimonios consistente y completo. Entonces Γ tiene un modelo cuyo universo son los términos cerrados de Γ.

Demostración de 2.8

- Por 2.10, Γ tiene una extensión consistente Γ' con testimonios y con un número numerable de términos cerrados.
- El lema 2.11 nos dice que Γ' tiene una extensión consistente y completa Γ'' con los mismos términos que Γ'.
- Además, Γ'' también tiene testimonios y, por 2.12, Γ'' tiene un modelo I cuyo universo corresponde al conjunto de términos cerrados de Γ''.
- Como Γ'' es una extensión de Γ, I también es un modelo (numerable) de Γ. □

Demostración de 2.10 I

Construiremos una extensión de Γ con testimonios y demostraremos que esta extensión es consistente.

Sean $\beta_1, \beta_2, \ldots$ fórmulas con una sola variable libre $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots$.
Sean $u_1, u_2, \ldots$ nombres ambiguos nuevos (como los que se usan en las reglas $I\,\forall$ y $E\,\exists$) tal que

$$u_k \notin \beta_i \text{ si } i \leq k.$$

Definimos ahora una sucesión de fórmulas

$$T_k \quad \equiv_{def} \quad (\exists x_{i_k}.\beta_k) \Rightarrow \beta_{k\,[x_{i_k}:=u_k]}.$$

Con estos testimonios, construimos las extensiones de Γ:

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_0 & = & \Gamma \\ \Gamma_{k+1} & = & \Gamma_k \cup \{T_k\} \\ \Gamma_* & = & \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k \end{array}$$

Demostración de 2.10 II

Y ahora demostraremos por inducción que cada Γ_k es consistente.

Caso básico. Γ_0 es consistente. Muy claro, pues $\Gamma_0 = \Gamma$.

Hipótesis inductiva. Γ_j es consistente, para toda $j < k$.

Por demostrar. Γ_k es consistente.

Por contradicción, supongamos que no. Entonces existe φ tal que

$$\Gamma_k \vdash_N \varphi \qquad \text{y} \qquad \Gamma_k \vdash_N \neg\varphi.$$

Como en el lema 2.7, podemos demostrar que $\Gamma_k \vdash_N \neg T_k$. Por el teorema de la deducción, también tenemos

$$\Gamma_{k-1} \vdash_N T_k \Rightarrow \neg T_k$$

Demostración de 2.10 III

y, nuevamente, por el teorema $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$ y $E \Rightarrow$

$$\Gamma_{k-1} \vdash_N \neg T_k.$$

Utilizando el teorema $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$, las leyes de De Morgan y $E\,\wedge$ nos quedamos con

$$\Gamma_{k-1} \vdash_N \exists x_{i_k}.\beta_k \qquad (19)$$

$$\Gamma_{k-1} \vdash_N \neg\beta_{k\,[x_{i_k}:=u_k]}. \qquad (20)$$

De acuerdo con un teorema demostrado ya, (19) es equivalente a

$$\neg\forall x_{i_k}.\neg\beta_k, \qquad (21)$$

Por construcción, el nombre u_k no aparece en las fórmulas de Γ_{k-1} y podemos realizar la demostración siguiente

Demostración de 2.10 IV

$$\begin{array}{lll} 1 & \gamma_1 & \text{Demostrable en } \Gamma_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \\ m & \boxed{\begin{array}{r} I\,\forall u_k \\ \neg\beta_{k\,[x_{i_k}:=u_k]} \end{array}} & \text{De acuerdo con (20)} \\ m+1 & \forall x_{i_k}.\neg\beta_k & I\,\forall\; m+1 \end{array}$$

¡Y esto claramente contradice (21)! Por tanto, Γ_k es consistente.

Finalmente, como cada Γ_k es consistente, Γ_* también lo es. □

Demostración de 2.11 I

Sea $\beta_1, \ldots, \beta_2, \ldots$ la sucesión de todas las fórmulas cerradas con símbolos de Γ. Definiremos la siguiente sucesión de conjuntos de fórmulas

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_0 & = & \Gamma \\ \Gamma_{n+1} & = & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\neg\beta_{n+1}\} & \text{si } \Gamma_n \nvdash_N \beta_{n+1} \\ \Gamma_n & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ \Gamma_* & = & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \end{array}$$

Por inducción, demostraremos que para toda i, Γ_i es consistente.

- *Caso básico*. Por hipótesis, Γ es consistente.
- *Hipótesis inductiva*. Para toda $j < i + 1$, Γ_j es consistente.

Demostración de 2.11 II

- P.D. Γ_{i+1} es consistente.
  Tenemos dos casos:
  (a) $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$;
  (b) $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\neg\beta_{n+1}\}$.
  En el caso (a), por hipótesis inductiva Γ_i es consistente y, por tanto, también Γ_{i+1}.
  En el caso (b), por definición $\Gamma_n \nvdash_N \beta_{n+1}$ y por el lema 2.7 $\Gamma_i \cup \{\neg\beta_{n+1}\}$ es consistente.

Finalmente, como cada Γ_i es consistente, Γ_* es consistente, ya que para toda demostración con premisas en Γ_* existe un j máximo tal que las premisas de la demostración pertenecen todas a Γ_j y, por la demostración anterior, Γ_j es consistente.
Y, claramente, Γ_* es completa por construcción. □

Lema para poder demostrar 2.12

Lema 2.13

Sea α una fórmula cerrada. Entonces

(a) $\Gamma \vdash_N \alpha$ *sii* $\Gamma \vdash_N \forall x.\, \alpha$.

(b) $\vDash_I \alpha$ *sii* $\vDash_I \forall x.\, \alpha$.

Demostración. Obsérvese que en (a) un sentido del bicondicional se puede obtener por la aplicación de la regla $E\forall$ y el opuesto por la regla $I\forall$, dado que podemos abrir una caja marcada con $I\forall n$, con n un nuevo nombre. Como $x \notin F(\alpha)$, pues α es cerrada, $\alpha_{[x:=n]} = \alpha$.

En cuanto a (b), basta observar que la cuantificación $\forall x$ no afecta la interpretación de α, dado que no contiene variables libres, y por lo mismo, las dos fórmulas son verdaderas en las mismas interpretaciones.

Demostración de 2.12 I

Sea Γ un conjunto consistente y completo con testimonios.
Construiremos un interpretación $I = \langle \Psi, \Phi, \Pi \rangle$ con universo $\boldsymbol{U}$ de la siguiente forma:

1. Para cada constante $c \in \Gamma$, nuestro universo tendrá una constante $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{U}$, con
$$\Psi(c) = \boldsymbol{c}.$$
2. Para cada símbolo funcional $f_k^n \in \Gamma$ tenemos una función $\boldsymbol{f_k^n}$ con $\Phi(f_k^n) = \boldsymbol{f_k^n}$. Si $t_1, \ldots, t_2$ son términos cerrados entonces
$$\Psi(f_k^n(t_1, \ldots, t_n)) = \Phi(f_k^n)(\Psi(t_1), \ldots, \Psi(t_n)) = \boldsymbol{f_k^n}(\boldsymbol{t_1}, \ldots, \boldsymbol{t_2}) \in \boldsymbol{U}.$$
3. Si $P_k^n \in \Gamma$, $t_1, \ldots, t_n$ son términos cerrados y $\Psi(t_1) = \boldsymbol{t_1}, \ldots, \Psi(t_n) = \boldsymbol{t_n}$, entonces
$$(\boldsymbol{t_1}, \ldots, \boldsymbol{t_n}) \in \Pi(P_k^n) \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_N P_k^n(t_1, \ldots, t_n).$$

Demostración de 2.12 II

Ahora demostraremos que I es un modelo de Γ. Para esto, demostraremos (por inducción) una propiedad más fuerte aún:

$$\models_I \gamma \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_N \gamma$$

donde γ es una fórmula cerrada (si γ tiene variables libres, tomaremos su cerradura).

Caso básico. Sea $\gamma = P^n_k(t_1, \ldots, t_n)$, con $t_1, \ldots, t_n$ términos cerrados. Por definición, $\models_I \gamma$.

Hipótesis inductivas. Sean (a) $\gamma = \neg\alpha$; (b) $\gamma = \alpha \vee \beta$; (c) $\gamma = \forall x.\, \alpha$. Entonces

$$\models_I \alpha \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_N \alpha$$
$$\models_I \beta \quad \text{sii} \quad \Gamma \vdash_N \beta$$

Demostración de 2.12 III

[Las otras conectivas no se consideran, pues pueden definirse en términos de $\neg$ y $\vee$. $\exists$ también puede definirse en términos de $\forall$.]

Por demostrar: $\models_I \gamma$ sii $\Gamma \vdash_N \gamma$.

Caso (a)

$\Gamma \vdash_N \neg\alpha$	sii	$\Gamma \nvdash_N \alpha$	pues Γ es completo y consistente
	sii	$\not\models_I \alpha$	por hipótesis inductiva
	sii	$\models_I \neg\alpha = \gamma$	pues α es cerrada.

Caso (b). Si $\Gamma \vdash_N \alpha \vee \beta$, como Γ es completo y consistente, o bien $\Gamma \vdash_N \alpha$ o bien $\Gamma \vdash_N \neg\alpha$.
Si $\Gamma \vdash_N \alpha$, por hipótesis inductiva $\models_I \alpha$ y por definición de satisfacción y verdad, $\models_I \alpha \vee \beta = \gamma$.
Si $\Gamma \vdash_N \neg\alpha$, por silogismo disyuntivo $\Gamma \vdash_N \beta$ y, por hipótesis inductiva, $\models_I \beta$. Por definición de satisfacción y verdad, $\models_I \alpha \vee \beta = \gamma$.

Demostración de 2.12 IV

A la inversa

$\models_I \alpha \vee \beta$	sii	$\models_I \alpha$ o $\models_I \beta$	
	sii	$\Gamma \vdash_N \alpha$ o $\Gamma \vdash_N \beta$	por hipótesis inductiva
	entonces	$\Gamma \vdash_N \alpha \vee \beta = \gamma$	por $I\vee$

Caso (c). Se subdivide en dos casos: (i) α es cerrada; (ii) α no es cerrada.
(i) Sea α cerrada. Entonces

$\Gamma \vdash_N \forall x.\, \alpha$	sii	$\Gamma \vdash_N \alpha$	por el lema 2.13
	sii	$\models_I \alpha$	por hipótesis inductiva
	sii	$\models_I \forall x.\, \alpha$	por el lema 2.13

(ii) Sea α no cerrada. Como $\forall x.\, \alpha$ sí lo es, eso quiere decir que α tiene una sola variable libre, precisamente x.

Demostración de 2.12 V

Supongamos que $\models_I \forall x.\, \alpha$ pero, por contradicción, $\Gamma \nvdash_N \forall x.\, \alpha$. Como Γ es completo, entonces $\Gamma \vdash_N \neg(\forall x.\, \alpha)$. Por la equivalencia entre cuantificadores, entonces

$$\Gamma \vdash_N \exists x.\, \neg\alpha$$

y como Γ cuenta con testimonios y por $E \Rightarrow$

$$\Gamma \vdash_N \neg\alpha_{[x:=u_j]}$$

para algún nombre u_j. Por hipótesis inductiva

$$\models_I \neg\alpha_{[x:=u_j]}$$

lo que claramente contradice la hipótesis $\models_I \forall x.\, \alpha$.

Demostración de 2.12 VI

Supongamos ahora que $\Gamma \vdash_N \forall x.\, \alpha$ pero $\not\models_I \forall x.\, \alpha$. Entonces, existe una $I' = \langle \Psi', \Phi, \Pi \rangle$ tal que Ψ' difiere de Ψ cuando mucho en la asignación de variables e I' no satisface $\forall x.\, \alpha$. Pero entonces, existe $I'' = \langle \Psi'', \Phi, \Pi \rangle$ tal que Ψ'' difiere de Ψ' cuando mucho en el valor de x e I'' no satisface α. Pero entonces $\not\models_I \alpha$ y, por hipótesis inductiva, $\Gamma \nvdash_N \alpha$. Pero como $\Gamma \vdash_N \forall x.\, \alpha$, por $E\forall$

$$\Gamma \vdash_N \alpha,$$

lo cual es una contradicción.
Por tanto

$$\models_I \forall x.\, \alpha \qquad \text{sii} \qquad \Gamma \vdash_N \forall x.\, \alpha.$$

Para finalizar, si $\gamma \in \Gamma$, claramente $\Gamma \vdash_N \gamma$ y, por tanto, $\models_I \gamma$, por lo que I es un modelo de Γ. □

Otras propiedades del cálculo de predicados I

Aunque no habrá tiempo de explicar y demostrar otros resultados de importancia en cálculo de predicados, a continuación se enuncian algunos, sin demostración.

Teorema 2.14 (Compacidad)

Si todos los subconjuntos finitos de un conjunto de fórmulas Γ tienen un modelo, entonces Γ también tiene un modelo.

Consistencia. Durante la demostración de completitud, se demostró y utilizó la propiedad de consistencia de la deducción natural en cálculo de predicados.

Durante la demostración de completitud, se repitió varias veces el enunciado *inocente* "si $\Gamma \nvdash_N \gamma$, entonces ...", pero el siguiente teorema dice que no tenemos una forma eficaz de saber si $\Gamma \vdash_N \gamma$.

Otras propiedades del cálculo de predicados II

Teorema 2.15 (Indecidibilidad)

Deducción natural es indecidible: no existe un procedimiento efectivo para contestar si ¿$\vdash_N \alpha$?, donde α es una fórmula arbitraria.

A nivel semántico 2.3 es un resultado equivalente , por lo que era de esperarse una respuesta negativa también aquí.
Si el problema fuera decidible, por la corrección y completitud de $\vdash_N$ en cálculo de predicados, tendríamos una forma indirecta de resolver el problema de la detención de máquinas de Turing.

Hay otros resultados positivos y (sobre todo) negativos del cálculo de predicados. Probablemente los más importantes históricamente son los teoremas de incompletitud de Gödel.